1ο Γενικό Λύκειο Χανίων 9 Μαρ 2015
Τάξη Β3
Ονοματεπώνυμο .... ομάδα Α΄

Ανακεφαλαιωτική εξέταση στην Άλγεβρα

Θέμα 1ο: Έστω πολυώνυμο $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_o$, με $\alpha_\nu, \alpha_{\nu-1}, ..\alpha_1, \alpha_o \in \mathbb{R}$ και $\nu \in \mathbb{N}$. Τι ονομάζουμε βαθμό του πολυωνύμου $P(x)$; Μονάδες 5

Θέμα 2ο: Να αποδείξετε, ότι αν το $\rho \in \mathbb{R}$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$ τότε το $x - \rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$. Μονάδες 5

Θέμα 3ο: Να λυθεί η εξίσωση $(2\text{συν}x + 1)(\text{εφ}^2 x - 3)\text{σφ}\, x = 0$ Μονάδες 15

Θέμα 4ο: Να λυθεί η εξίσωση $\text{συν}4x = \dfrac{1}{2}$ στο $(-\pi, \pi)$ Μονάδες 10

Θέμα 5ο: Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $f(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 15

Θέμα 6ο: Να λύσετε την εξίσωση $2\text{ημ}^4 x - 3\text{ημ}^3 x - 3\text{συν}^2 x - 3\text{ημ}x + 4 = 0$ Μονάδες 15

Θέμα 7ο : Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + (\beta - 1)x^2 - 3x - 2\beta + 6$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α. Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+1$ είναι ίσο με 2, τότε να δείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=4$.

Μονάδες 12

β. Για τις τιμές των α και β του ερωτήματος α), να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

Μονάδες 8

Θέμα 8ο : Να λυθεί η ανίσωση $\dfrac{x^2}{x+1} - \dfrac{4}{x-1} \leq \dfrac{2}{x^2-1}$ Μονάδες 15

Απαντήσεις
εξέτασης στη Άλγεβρα 9.3.15

Ομάδα Α'

Θ.1 , Θ.2 Θεωρία.

Θ3. Είναι για $x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

$2\sigma\upsilon\nu x = -1$ ή $\varepsilon\varphi^2 x = 3$ ή $\sigma\varphi x = 0 \iff$

$\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}$ ή $\varepsilon\varphi x = \sqrt{3}$ ή $\varepsilon\varphi x = -\sqrt{3}$ ή $\sigma\varphi x = 0 \iff$

$x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$ ή $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ή $x = k\pi + \pi/2$ (απορρίπτονται)

με $k \in \mathbb{Z}$

Θ.4 Είναι $\sigma\upsilon\nu 4x = +\frac{1}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \iff 4x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \iff x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$.

Όμως $x \in (-\pi, \pi) \iff -\pi < \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{12} < \pi$ ή $-\pi < \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} < \pi \iff$

$-12 < 6k+1 < 12$ ή $-12 < 6k-1 < 12$

$-13 < 6k < 11$ ή $-11 < 6k < 13$

$-\frac{13}{6} < k < \frac{11}{6}$ ή $-\frac{11}{6} < k < \frac{13}{6} \iff$

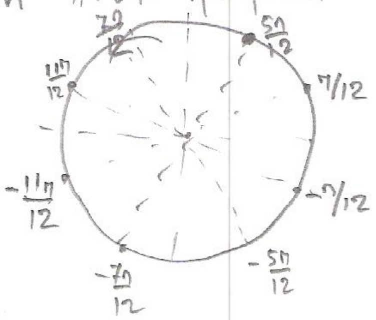
$k = -2, -1, 0, 1$ ή $k = -1, 0, 1, 2$

Δηλ λύσεις στο $(-\pi, \pi)$ είναι:

$x_1 = -\pi + \frac{\pi}{12} = -\frac{11\pi}{12}$, $x_2 = -\frac{5\pi}{12}$ $x_3 = \frac{\pi}{12}$ $x_4 = \frac{7\pi}{12}$

$x_5 = -\frac{7\pi}{12}$, $x_6 = -\frac{\pi}{12}$, $x_7 = \frac{5\pi}{12}$ ή $x_8 = \frac{11\pi}{12}$

ή 2η λύση. Γραφικά



Θέμα 5ο. Η γ.π. του f(x) είναι κάτω από τον x'x αν και μόνο αν:

$f(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x < 0 \iff x(x^3 - 5x^2 + 3x + 1) < 0$

$\iff x(x-1)(x^2 - 4x - 1) < 0$

$\iff x \in (2-\sqrt{5}, 0) \cup (1, 2+\sqrt{5})$

1	-5	3	1	1
	1	-4	-1	
1	-4	-1	0	

$x^2 - 4x - 1 = 0$

$x = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} =$

$= 2 \pm \sqrt{5}$

	$2-\sqrt{5}$		0		1		$2+\sqrt{5}$	
+	0	−	0	+	0	−	0	+

1ο Γενικό Λύκειο Χανίων 9 Μαρ 2015
Τάξη Β3
Ονοματεπώνυμο .... ομάδα Α΄

Θέμα 6°: Η εξίσωση είναι: $2\eta\mu^4x - 3\eta\mu^3x - 3\sigma\upsilon\nu^2x - 3\eta\mu x + 4 = 0$

$\Longleftrightarrow 2\eta\mu^4x - 3\eta\mu^3x - 3(1-\eta\mu^2x) - 3\eta\mu x + 4 = 0$

$\Longleftrightarrow 2\eta\mu^4x - 3\eta\mu^3x + 3\eta\mu^2x - 3\eta\mu x + 1 = 0.$

Θέτοντας $t = \eta\mu x \in [-1,1]$ έχουμε

$2t^4 - 3t^3 + 3t^2 - 3t + 1 = 0$

$(t-1)(2t^3 - t^2 + 2t - 1) = 0 \Longleftrightarrow$

$(t-1)[t^2(2t-1) + 2t - 1) = 0 \Longleftrightarrow$

$(t-1)(2t-1)(t^2+1) = 0 \Longleftrightarrow$

$t = 1$ ή $2t = 1$ ή $t^2 = -1$ (αδύνατη στο $\mathbb{R}$)

2	−3	3	−3	1	1
	2	−1	2	−1	
2	−1	2	−1	0	

Έτσι $\eta\mu x = 1$ ή $\eta\mu x = \frac{1}{2} = \eta\mu\frac{\pi}{6}$

$x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Θέμα 7. α. 1 ρίζα του $P(x) \Longleftrightarrow P(1) = 0 \Longleftrightarrow \alpha - 3 - \beta + 6 - 1 = 0 \Longleftrightarrow \alpha - \beta = -2.$ (1)

Το υπόλοιπο της $P(x):(x+1)$ είναι 2 αν και μόνο αν

$P(-1) = 2$ ή $-\alpha + \beta - 1 + 3 - 2\beta - 6 = 2 \Longleftrightarrow \alpha + \beta = 6$ (2)

Από (1),(2) $\begin{matrix} 2\alpha = 4 \\ 2\beta = 8 \end{matrix} \Longleftrightarrow \begin{matrix} \alpha = 2 \\ \beta = 4. \end{matrix}$

β. Η εξίσωση είναι: $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$

$2(x^3-1) + 3x(x-1) = 0 \Longleftrightarrow$

$2(x-1)(x^2+x+1) + 3x(x-1) = 0 \Longleftrightarrow$

$(x-1)(2x^2+5x+2) = 0 \Longleftrightarrow$

$x = 1$ ή $x = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{4} = \left\langle \begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ -2. \end{matrix} \right.$

Θέμα 8°: Η ανίσωση έχει νόημα όταν $x \neq 1, -1$.

Είναι $\frac{x^2}{x+1} - \frac{4}{x-1} - \frac{2}{(x-1)(x+1)} \leq 0 \Longleftrightarrow \frac{x^2(x-1) - 4(x+1) - 2}{(x-1)(x+1)} \leq 0$

$\Longleftrightarrow \frac{x^3 - x^2 - 4x - 6}{(x-1)(x+1)} \leq 0 \Longleftrightarrow$

$(x-1)(x+1)(x-3)(x^2+2x+2) \leq 0 \Longleftrightarrow$

$(x-1)(x+1)(x-3) \leq 0$ γιατί $x^2+2x+2>0$ αφού $\Delta = -4$

$\boxed{x < -1 \text{ ή } 1 < x \leq 3.}$

1	−1	−4	−6	3
	3	6	6	
1	2	2	0	

ρίζες

	−1		1		3	
−	0	+	0	−	0	+

1ο Γενικό Λύκειο Χανίων 9 Μαρ 2015

Τάξη Β3

Ονοματεπώνυμο .... ομάδα Β΄

Ανακεφαλαιωτική εξέταση στην Άλγεβρα

Θέμα 1ο: Έστω πολυώνυμο $P(x)= \alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\ldots + \alpha_1 x+\alpha_o$, με $\alpha_\nu, \alpha_{\nu-1}, ..\alpha_1, \alpha_o \in \mathbb{R}$ και $\nu\in\mathbb{N}$. Τι ονομάζουμε βαθμό του πολυωνύμου $P(x)$; Μονάδες 5

Θέμα 2ο: Να αποδείξετε, ότι αν το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$ τότε το $\rho\in\mathbb{R}$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$το. Μονάδες 5

Θέμα 3ο: Να λυθεί η εξίσωση $(2\eta\mu x +1)(\sigma\varphi^2 x - 3)\varepsilon\varphi x = 0$ Μονάδες 15

Θέμα 4ο: Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu 3x = \frac{1}{2}$ στο $(-\pi, \pi)$ Μονάδες 10

Θέμα 5ο: Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + x^2 + x$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x΄x$.

Μονάδες 15

Θέμα 6ο: Να λύσετε την εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu^4 x - 3\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\eta\mu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + 4 = 0$

Μονάδες 15

Θέμα 7ο : Το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3-x^2+\beta x+1$ με $\alpha ,\beta\in\mathbb{R}$ έχει παράγοντα το $x+\frac{1}{2}$ και διαιρούμενο με το $x-2$ δίνει υπόλοιπο 15.

α. Να δείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta =1$. Μονάδες 12

β Για τις τιμές των α και β του ερωτήματος α), να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

Μονάδες 8

Θέμα 8ο: Να λυθεί η ανίσωση $\frac{3x^2-1}{x-1}-\frac{2}{x^2-x} > \frac{x^2-3x+2}{x}$ Μονάδες 15

1ο Γενικό Λύκειο Χανίων 9 Μαρ 2015
Τάξη Β3
Ονοματεπώνυμο .... ομάδα Α΄

Ομάδα Β΄

Θ.1. Θ.2 Θεωρία

Θ3. Η εξίσωση ορίζεται για $x \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Είναι $ημx = -\frac{1}{2} = ημ\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ ή $σφx = \sqrt{3} = σφ\frac{\pi}{3}$ ή

$σφx = -\sqrt{3} = σφ\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ ή $εφx = 0 = εφ0$

άρα $x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2k\pi - \frac{5\pi}{6}$ ή $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ ή $x = k\pi$ (απορρίπτεται)
με $k \in \mathbb{Z}$.

Θ4. Είναι $ημ3x = \frac{1}{2} = ημ\frac{\pi}{6} \iff$

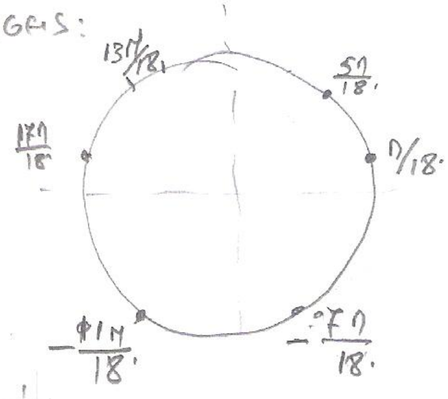
$3x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $3x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$.

$x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{18}$ ή $x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{5\pi}{18}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Από το τρ. κύκλο είναι δεκτές οι λύσεις:

$x_1 = \frac{\pi}{18}$, $x_2 = \frac{13\pi}{18}$, $x_3 = -\frac{7\pi}{18}$,

$x_4 = \frac{5\pi}{18}$, $x_5 = \frac{17\pi}{18}$, $x_6 = \frac{-11\pi}{18}$.



Θ.5. Η γ.π της f είναι κάτω από τον x'x
αν και μόνο αν $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + x^2 + x < 0$

$\iff x(3x^3 - 5x^2 + x + 1) < 0$

$\iff x(x-1)(3x^2 - 2x - 1) < 0$

$\iff x \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$

3	-5	1	1	1
	3	-2	-1	
3	-2	-1	0	

$3x^2 - 2x - 1 = 0$

$\Delta = 4 + 12 = 16$

$x = \frac{2 \pm 4}{6} = 1, \; -\frac{1}{3}$

	$-1/3$		0		1	
+	0	−	0	+	0	+

Θ.6. Είναι $2συν^4x - 3συν^3x - 3(1-συν^2x) - 3συνx + 4 = 0 \Leftrightarrow$

$2συν^4x - 3συν^3x + 3συν^2x - 3συνx + 1 = 0.$

Θέτοντας $t = συνx \in [-1,1]$ παίρνουμε:

$$2t^4 - 3t^3 + 3t^2 - 3t + 1 = 0.$$

2	−3	3	−3	1	1
	2	−1	2	−1	
2	−1	2	−1		

Όπως στο Θ6 της Α΄ ομάδας

$$(t-1)(2t-1)(t^2+1) = 0$$

$t = 1$ ή $t = \frac{1}{2}$

Έτσι $συνx = 1 = συν0$ ή $συνx = \frac{1}{2} = συν\frac{\pi}{3}$

$x = 2κ\pi$ ή $x = 2κ\pi \pm \frac{\pi}{3}$ με $κ \in \mathbb{Z}$.

Θ.7. α. Το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x + \frac{1}{2}$ αν και μόνο αν

$P(-\frac{1}{2}) = 0$ δηλ $-\frac{α}{8} - \frac{1}{4} - \frac{β}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow +α + 4β = 6 \quad (1)$

Η διαίρεση $P(x):(x-2)$ έχει υπόλοιπο 15 άρα

$P(2) = 8α - 4 + 2β + 1 = 15 \Leftrightarrow 4α + β = 9 \quad (2)$

Από (1), (2) $\begin{cases} α = 6 - 4β \\ 24 - 16β + β = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} α = 2, \\ β = 1 \end{matrix}$

β. Η εξίσωση είναι: $2x^3 - x^2 + x + 1 = 0.$

$\Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})(2x^2 - 2x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ αφού $2x^2 - 2x + 2 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ με $Δ = -12$.

2	−1	1	1	−1/2
	−1	1	−1	
2	−2	2	0.	

Θ.8. Η ανίσωση ορίζεται για $x \neq 0, 1$ και

είναι: $\frac{3x^2-1}{x-1} - \frac{2}{x(x-1)} - \frac{x^2-3x+2}{x} > 0 \Leftrightarrow$

$\frac{3x^3 - x - 2 - (x^2-3x+2)(x-1)}{x(x-1)} > 0 \Leftrightarrow$

$\frac{3x^3 - x - 2 - (x^3 - x^2 - 3x^2 + 3x + 2x - 2)}{x(x-1)} > 0$

$\frac{3x^3 - x - 2 - x^3 + x^2 + 3x^2 - 3x - 2x + 2}{x(x-1)} > 0$

$\frac{2x^3 + 4x^2 - 4x}{x(x-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{\cancel{x}(x^2+4x-4)}{\cancel{x}(x-1)} > 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+4x-4) > 0 \Leftrightarrow$

$\boxed{-2 - 2\sqrt{2} < x < 0 \text{ ή } 0 < x < -2 + 2\sqrt{2} \text{ ή } x > 1}$

$x^2 + 4x - 4$

$x = \frac{-4 \pm 4\sqrt{2}}{2}$

$= -2 \pm 2\sqrt{2}$