Ονοματεπώνυμο……

1ο Γενικό Λύκειο Χανίων **ΣΧΟΛ. ΕΤΟΣ 23- 24**

Τάξη Β

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ
στην Άλγεβρα

Τα θέματα ΔΕΝ θα μεταφερθούν στο καθαρό.
Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα
Οι απαντήσεις να γραφούν στο καθαρό
Τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι
Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες

Θέμα 1^{o}

Α. **Ι.** Να μεταφέρετε τον αριθμό κάθε πρότασης στο γραπτό σας και δίπλα να χαρακτηρίσετε σαν «ΣΩΣΤΟ» ή «ΛΑΘΟΣ» κάθε μία.

1. Όταν το σύστημα $\begin{cases} \alpha\chi+\beta\psi=\gamma \\ \kappa\chi+\lambda\psi=\mu \end{cases}$ με α, β, γ, κ, λ, μ $\neq 0$ έχει άπειρες λύσεις τότε οι ευθείες ε_1: $\alpha x + \beta y = \gamma$ και ε_2: $\kappa x + \lambda y = \mu$ ταυτίζονται. **ΣΩΣΤΟ**

2. Αν μια συνάρτησης $f:\Delta\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα τότε ισχύει για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$. **ΣΩΣΤΟ**

3. Υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει ημ$x=0$ και συν$x=0$ **ΛΑΘΟΣ**

4. Για οποιαδήποτε πολυώνυμα $P(x)$ και $\delta(x)$ ισχύει η ταυτότητα $P(x) = \delta(x)\cdot\pi(x)+\upsilon(x)$ όπου $\pi(x)$, $\upsilon(x)$ πολυώνυμα του x. **ΛΑΘΟΣ**

Μονάδες 8

ΙΙ. Να γράψετε στο γραπτό σας τις λέξεις που συμπληρώνουν τα κενά στην πρόταση.
«Λογάριθμος ενός θετικού_αριθμού x, ως προς βάση το α με $0<\alpha\neq 1$ ονομάζεται ο **<u>εκθέτης</u>** της δύναμης του α ώστε να ισχύει $\alpha^{\log_\alpha x} = x$». **Μονάδες 2**

Β. Να αποδείξετε την πρόταση:
«Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό $\rho\in\mathbb{R}$ τότε το πολυώνυμο $x-\rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$». **Μονάδες 15**
Θεωρία σελ. 135 (Αντιστρόφως)

Θέμα 2^o (22002)

Δίνεται ότι ημ18^o $= \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Να βρείτε τους ακόλουθους τριγωνομετρικούς αριθμούς, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α. συν72^o **Μονάδες 8**

β. συν108^o **Μονάδες 9**

γ. ημ162^o **Μονάδες 8**

Λύση

α. συν72^o =συν(90^o-18^o) =ημ18^o = $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (72^o και 18^o συμπληρωματικές ωνίες)

β. συν108^o= συν(90^o+18^o) = –ημ18^o = - $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. (λόγω του ότι το σημείο των 108^o στον τριγωνομετρικό κύκλο βρίσκεται στο ΙΙ τεταρτημόριο, όπου συν108^o <0)

γ. ημ162^o = ημ(180^o-18^o) = ημ18^o = $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. (οι γωνίες 162^o και 18^o είναι παραπληρωματικές).

Θέμα 3^o

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = x^3+x^2+\alpha x+\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x+1)$ είναι 8 και η γραφική παράσταση της τέμνει τον $x'x$ στο σημείο (1, 0) τότε:

α. Να δείξετε ότι α=–5 και β=3. **Μονάδες 10**

β. Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $P(x)$ **Μονάδες 8**

γ. *Να λύσετε την ανίσωση $ln^3x+ln^2x-5lnx+3 \le 0$.* ***Μονάδες 7***

Λύση

α. Επειδή το υπόλοιπο της $P(x):(x+1)$ είναι 8 έχουμε $P(-1) = 8$

δηλ. $-1+1-\alpha+\beta=8 \Leftrightarrow \alpha-\beta=-8$ (1).

Επίσης αφού το διάγραμμα της P τέμνει τον $x'x$ στο σημείο (1, 0) το 1 είναι ρίζα του $P(x)$ δηλ. $P(1) = 0$ ή $1+1+\alpha+\beta=0 \Leftrightarrow \alpha+\beta=-2$ (ΙΙ).

Έτσι $\begin{cases}\alpha-\beta=-8\\ \alpha+\beta=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\alpha=-10\\ 2\beta=6\end{cases} \Leftrightarrow$ α= –5 και β = 3.

β. Για α=–5 και β=3 είναι $P(x) = x^3+x^2-5x+3=0$.

Είναι

1	1	-5	3	1
	1	2	**-3**	
1	**2**	**-3**	**0**	

Οπότε $P(x) = (x-1)(x^2+2x-3) = (x-1)(x-1)(x+3) = (x-1)^2(x+3)$.

γ. Η ανίσωση ορίζεται για $x>0$ (π),

και είναι η $P(lnx) \le 0$

Από το β. ερώτημα έχουμε τον πίνακα

x		-3		1	
προσ. $P(x)$	-	0	+	0	+

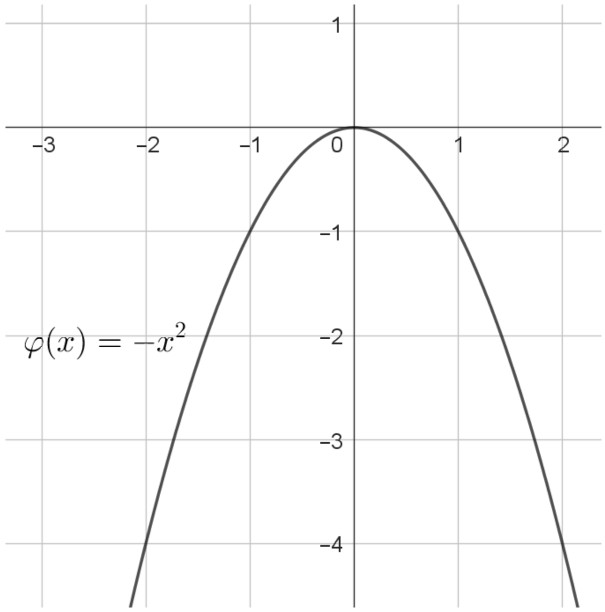
Άρα λύσεις όταν $x>0$ και $lnx\le-3$ ή $lnx=1$ δηλ λύσεις $x\in(0, e^{-3}]$ ή $x==e$.

Θέμα 4ο (32677)

Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = -x^2, x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = -x^2 + 2x + 1, x \in \mathbb{R}$.

α.

Να αποδείξετε ότι $f(x) = -(x-1)^2 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f.



Μονάδες 10

β. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f να βρείτε:

i . Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη. **Μονάδες 5**

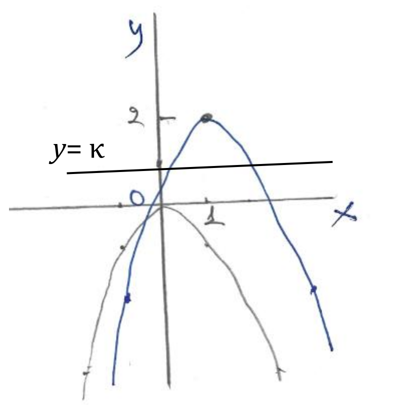
ii. Το ολικό ακρότατο της f καθώς και τη θέση του. **Μονάδες 5**

iii. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa, \kappa < 2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. **Μονάδες 5**

Λύση

α. Για $x \in \mathbb{R}$ είναι f(x)= $-(x-\frac{2}{2\cdot 1})^2 - \frac{4-4\cdot 2}{4\cdot 1} = -(x-1)^2 + 2$.

Η γραφική παράσταση είναι η παραβολή που προκύπτει από οριζόντια κατά +1 και κατακόρυφα κατά +2 της C_φ (που είναι μια παραβολή).



β. i. Από το διάγραμμα διαπιστώνουμε ότι η f γν. αύξουσα στο (–∞, 1] καιγν. φθίνουσα στο [1, +∞)

ii. Το ακρότατο της συνάρτησης είναι το 2=f(1) στην θέση x=1.

iii. Οι ζητούμενες λύσεις είναι οι λύσεις του συστήματος

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = \kappa, \kappa < 2 \end{cases}.$$

Η ευθεία y=κ είναι οριζόντια και τέμνει τον $y'y$ στο σημείο (0, κ) με κ<2. Οπότε από το διάγραμμα της C_f βλέπουμε ότι τέμνει την C_f σε 2 μόνο σημεία Επομένως οι λύσεις της f(x)=κ είναι ακριβώς 2.(οι τετμημένες των σημείων τομής της ευθείας y=κ και της C_f .