Αναλογίες ευθυγράμμων τμημάτων

1. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ και Β σημείο του.

Αν $\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{1}{4}$ να βρείτε τον λόγο $\frac{AB}{A\Gamma}$.

2. Οι πλευρές ενός τριγώνου είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 3, 5, 7. Αν η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου διαφέρει από την μικρότερη κατά 16 cm να υπολογιστούν τα μήκη των πλευρών του τριγώνου και η περίμετρος του.

3. Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{5}{7}$, να δείξετε ότι $\frac{7\alpha-3\beta}{7\alpha+3\beta}=\frac{1}{4}$.

4. Τα τμήματα χ, ψ είναι ανάλογα προς τα τμήματα 5τ και 2τ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε .τα χ και ψ σε κάθε μια από τις περιπτώσεις:

α. $\chi+\psi=\frac{7}{3}\alpha$, **β.** $\chi-\psi=\frac{3}{2}\alpha$, όπου τα και α δεδομένα ευθύγραμμα τμήματα.

5. Αν α, β,γ, δ ευθύγραμμα τμήματα με μη μηδενικό μήκος για τα οποία ισχύει $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$,

να δείξετε ότι :

α. $\frac{\alpha}{\delta}=\frac{\beta\gamma}{\delta^2}$, **β.** $\frac{1}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha\delta}$, **γ.** $\frac{\alpha\delta}{\beta}=\gamma$,

δ. $\frac{\alpha-1}{\beta}=\frac{\beta\gamma-\delta}{\beta\delta}$, **ε.** $\frac{5\alpha+\beta}{3\alpha+4\beta}=\frac{5\gamma+\delta}{3\gamma+4\delta}$, **στ.** $\frac{\mu\alpha+\nu\beta}{\kappa\alpha+\lambda\beta}=\frac{\mu\gamma+\nu\delta}{\kappa\gamma+\lambda\delta}$.

6. Αν το β είναι η μέση ανάλογος των α και γ και το γ είναι η μέση ανάλογος των β και δ να δείξετε ότι : $\frac{\alpha}{\delta}=\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^3$

7. Σε ημιευθεία Αχ παίρνουμε τα τμήματα ΑΒ = 8, ΑΓ =6 και ΑΔ = 12.

α. Να δείξετε ότι $\frac{\Gamma A}{\Gamma B}=\frac{\Delta A}{\Delta B}$[1].

β. Ποιος είναι ο λόγος $\frac{\Gamma A}{\Gamma B}=\frac{\Delta A}{\Delta B}$ τότε;

[1] τα σημεία Γ και Δ λέγονται αρμονικά συζυγή των Α, Β

8. Σε μια ευθεία παίρνουμε στη σειρά τα σημεία Α, Β , Γ, Δ, έτσι ώστε (ΑΒ) = 6, (ΒΓ) =2 , (ΓΔ) = 4. Θεωρούμε τα σημεία Μ και Ν τέτοια ώστε το Μ να διαιρεί εξωτερικά το ΑΓ και το Ν εσωτερικά το ΒΓ, σε λόγο $\frac{5}{3}$. Αν Κ και Λ είναι αντίστοιχα τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ να βρεθούν οι λόγοι $\frac{KM}{\Lambda M}$ και $\frac{NK}{N\Lambda}$

9. Αν για τα συνευθειακά σημεία Α, Β, Γ, Δ, ισχύει $\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Delta A}{\Delta B}$ και ΑΒ =α >ΑΓ = β

α. να προσδιορίσετε την θέση του Δ και

β. να υπολογιστεί το μήκος ΑΔ συναρτήσει των α, β.

10. Σε ευθεία ε θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Μ, Β, Ν, έτσι ώστε τα Μ, Ν να είναι αρμονικά συζυγή των Α, Β με λόγο $\lambda = \frac{\mu}{\nu}$, όπου $\mu, \nu \in N^*$. Να αποδείξετε ότι:

α. τα Α και Β είναι επίσης αρμονικά συζυγή των Μ, Ν με λόγο $\rho = \frac{|\mu - \nu|}{\mu + \nu}$,

β. αν επί πλέον λ>1 τότε $\frac{2}{AB} = \frac{1}{MA} + \frac{1}{NA} = \frac{1}{MB} - \frac{1}{NB}$.

11. Δίνονται τμήμα ΑΒ = α με μέσον το Ο και σημεία Σ και Ρ στην ευθεία ΑΒ, τέτοια ώστε, το Σ να είναι εσωτερικό του ΑΒ ενώ το Ρ εξωτερικό και $\frac{\Sigma A}{\Sigma B} = \frac{PA}{PB} = \lambda$ με $0 < \lambda \neq 1$.

α. Να υπολογίσετε συναρτήσει των λ και α τα μήκη ΣΑ, ΣΒ, ΡΑ, ΡΒ,

β. Να δείξετε ότι $O\Sigma . OP = OA^2$,

γ. Αν λ > 1 να δείξετε ότι $\frac{2}{AB} = \frac{1}{\Sigma A} + \frac{1}{PA}$.

Θεώρημα Θαλή

12. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ, κάθε παράλληλη ευθεία προς τη διάμεσο ΑΜ, ορίζει στους φορείς των πλευρών της γωνίας Α τμήματα ανάλογα προς τις πλευρές αυτές.

13. Σε τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε τα μέσα Δ και Ε των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντιστοίχως. Αν Ζ είναι τυχαίο σημείο της ΒΓ, αποδείξτε ότι η ΔΕ διχοτομεί την ΑΖ.

14. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ). Αν η διάμεσος ΜΝ του τραπεζίου τέμνει τη διαγώνιο ΒΔ στο Ε, αποδείξτε ότι ΔΕ = ΕΒ.

15. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από σημείο Μ της ΒΓ φέρνουμε παράλληλη προς τη διάμεσο ΑΔ που τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα Ν, Ρ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{MN}{A\Delta}=\frac{MB}{B\Delta}$ β) $\frac{MP}{A\Delta}=\frac{M\Gamma}{\Delta\Gamma}$ γ) ΜΝ + ΜΡ = σταθερό

16. Οι βάσεις ενός τραπεζίου έχουν μήκη α και 3α και οι μη παράλληλες πλευρές β και 3β. Αν οι μη παράλληλες πλευρές τέμνονται στο Μ, να βρεθούν τα μήκη των πλευρών του τριγώνου που έχει κορυφή το σημείο Μ και βάση τη μεγαλύτερη από τις βάσεις του τραπεζίου.

17. Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ και ευθεία παράλληλη προς τις βάσεις του ΑΒ, ΓΔ που τέμνει την ΑΔ στο σημείο Ε, την ΒΓ στο σημείο Ζ, την ΑΓ στο σημείο Κ και την ΒΔ στο σημείο Λ. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{EK}{\Gamma\Delta}=\frac{AE}{A\Delta}$ β) $\frac{\Lambda Z}{\Gamma\Delta}=\frac{BZ}{B\Gamma}$ γ) ΕΚ = ΛΖ

18. Έστω ΓΔ η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τριγώνου ΑΒΓ και *ΑΒ* = *3ΑΔ*. Δύο κινητά κ_1 και κ_2 ξεκινούν ταυτόχρονα *από* την κορυφή Γ και κινούνται με σταθερές ταχύτητες στις διαδρομές $\Gamma \longrightarrow A \longrightarrow \Delta$ και. .$\Gamma \longrightarrow B \longrightarrow \Delta$ αντιστοίχως.
α) Αν τα κινητά έχουν την ίδια σταθερή ταχύτητα, να βρείτε τη θέση του κ_2 *ό*ταν το κι βρεθεί στο σημείο Α.
β) Αν η ταχύτητα του κ_2 είναι διπλάσια της ταχύτητας του κ_1, να βρείτε ποιο θα φτάσει πρώτο στο τέρμα της διαδρομής.

19. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ύψη τα ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ. Έστω Κ, Λ, Μ τα σημεία τομής των υψών με τα τμήματα ΕΖ, ΖΔ, ΔΕ αντίστοιχα (πλευρές του ορθικού τριγώνου). Να δείξετε ότι οι τετράδες Ι. Α, Κ, Η, Δ, ΙΙ. Β, Λ, Η, Ε και ΙΙΙ. Γ, Μ, Η, Ζ είναι αρμονικές.