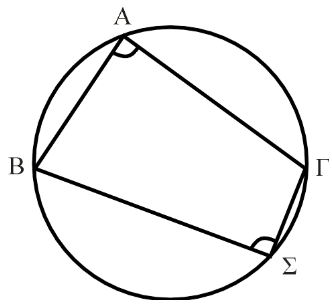
Εγγεγραμμένες γωνίες

1. Δυο εγγεγραμμένες γωνίες, που καθεμιά βαίνει στο τόξο που δέχεται την άλλη, όπως οι γωνίες Α και Σ είναι πάντοτε:

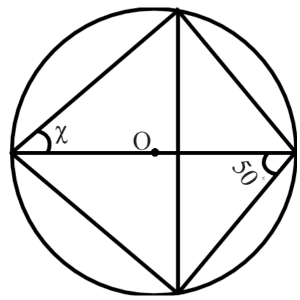


Α. ίσες   **Β.** συμπληρωματικές

Γ. παραπληρωματικές   **Δ.** αμβλείες

Ε. κανένα από τα παραπάνω

2. Στο διπλανό σχήμα Ο είναι το κέντρο του κύκλου και οι διαγώνιες του τετραπλεύρου τέμνονται κάθετα. Η γωνία x ισούται με:

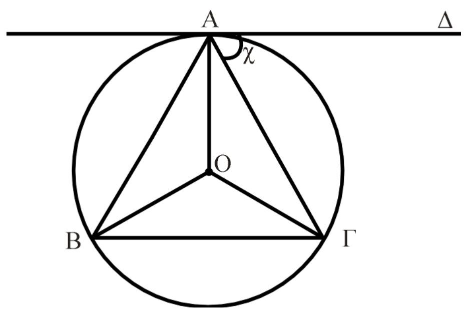


Α. 10°   **Β.** 20°   **Γ.** 30°

Δ. 40°   **Ε.** 50°

3. Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Έστω ΑΔ το ύψος του και Μ μέσο του ΒΓ. Να δείξετε ότι η ΑΜ διχοτομεί την γωνία της ακτίνας του Α και του ύψους ΑΔ.

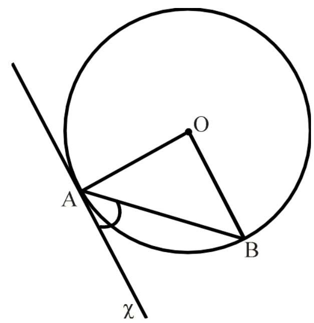
4. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο, Ο είναι το κέντρο του κύκλου και η ΑΔ εφαπτομένη του κύκλου. Η γωνία x ισούται με:



Α. 20°   **Β.** 30°   **Γ.** 45°

Δ. 60°   **Ε.** 80°

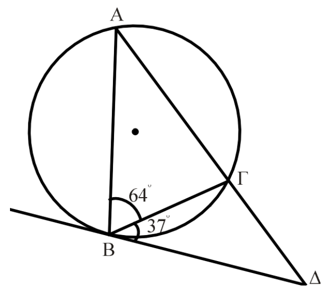
5. Στο διπλανό σχήμα Ο είναι το κέντρο του κύκλου και η εφαπτομένη Αx παράλληλη στην ΟΒ. Η γωνία xΑΒ ισούται με:



Α. 20°   **Β.** 30°   **Γ.** 45°

Δ. 60°   **Ε.** 80°

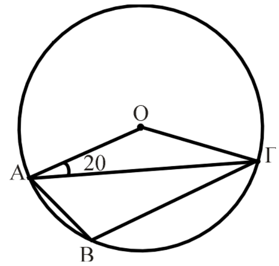
6. Στο διπλανό σχήμα ΑΒΓ = 64° και ΓΒΔ = 37° και ΒΔ εφαπτομένη κύκλου. Η γωνία ΒΓΔ ισούται με:



Α. 143° **Β.** 37° **Γ.** 79°

Δ. 101° **Ε.** 64°

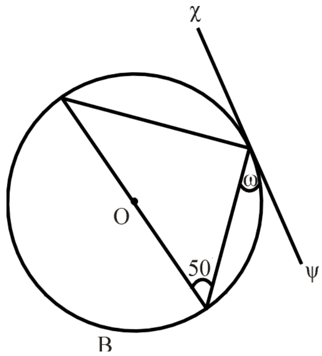
7. Στο διπλανό σχήμα Ο είναι το κέντρο του κύκλου και ΟΑΓ = 20°. Η γωνία ΑΒΓ ισούται με:



Α. 70° **Β.** 80° **Γ.** 100°

Δ. 110° **Ε.** 140°

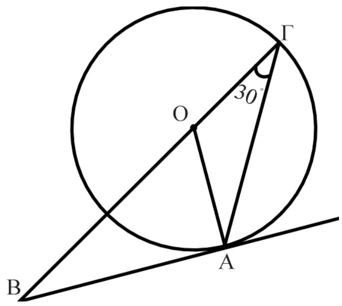
8. Στο διπλανό σχήμα Ο είναι το κέντρο του κύκλου και χψ εφαπτομένη του. Η γωνία ω ισούται με:



Α. 30° **Β.** 40° **Γ.** 45°

Δ. 50° **Ε.** 60°

9. Στο διπλανό σχήμα Ο είναι το κέντρο του κύκλου, ΒΑ εφαπτομένη του και Γ = 30°.



α) Η γωνία Β ισούται με:

Α. 15° **Β.** 30° **Γ.** 45°

Δ. 60° **Ε.** 75°

β) Το ευθύγραμμο τμήμα ΒΟ ισούται με:

Α. ΑΒ **Β.** ΑΟ **Γ.** ΑΓ **Δ.** 2ΑΒ **Ε.** 2ΑΟ

10. Δίνεται κύκλος με κέντρο Ο. Γράφουμε μια διάμετρό του ΑΒ και μια χορδή ΑΓ. Αν οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία Β και Γ κόβονται στο σημείο Σ, να αποδείξετε ότι:

α. $B\hat{O}\Gamma = 2B\hat{\Gamma}\Sigma$

β. ΟΣ // ΑΓ

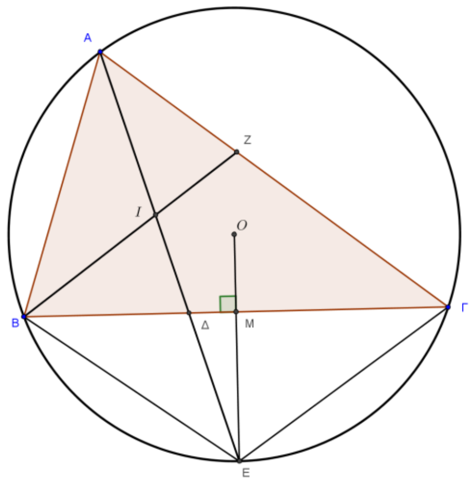
11. Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και χορδή του ΑΒ . Οι εφαπτόμενες στα Α και Β τέμνονται στο Γ. Αν Ι είναι το σημείο τομής της διακεντρικής ευθείας του Γ με το μικρότερο από τα τόξα της χορδής ΑΓ να δείξετε ότι το Ι είναι το έγκεντρο του ΑΒΓ.

12. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Φέρουμε κάθετο ΟΜ⊥ΒΓ, (που τέμνει τον κύκλο στο Ε) και τη διχοτόμο ΒΖ. Να αποδείξετε ότι

α. το Ι είναι έγκεντρο του ΑΒΓ,

β. $B\hat{I}\Gamma = \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}$

γ. ΒΕ=ΕΙ=ΓΕ



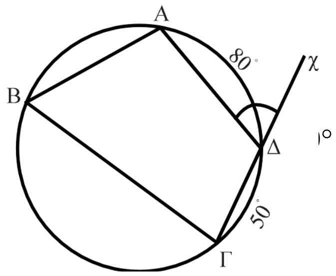
Εγγεγραμμένα και εγγράψιμα τετράπλευρα

		Σωστό	Λάθος
13.	Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο αν είναι παραλληλόγραμμο.	☐	☐
14.	Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο αν είναι ορθογώνιο.	☐	☐
15.	Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο αν είναι ρόμβος.	☐	☐
16.	Αν η διάμεσος ενός τραπεζίου το χωρίζει σε δύο εγγράψιμα τραπέζια τότε το αρχικό τραπέζιο είναι εγγράψιμο.	☐	☐
17.	Κάθε παραλληλόγραμμο που είναι εγγράψιμο σε κύκλο είναι τετράγωνο.	☐	☐
18.	Αν ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο τότε οι μεσοκάθετοι των πλευρών του διέρχονται απ' το ίδιο σημείο.	☐	☐
19.	Αν ένα τραπέζιο είναι εγγράψιμο σε κύκλο τότε η διάμεσός του τριχοτομείται από τις διαγώνιές του.	☐	☐

20. Αν ένα τετράπλευρο είναι εγγεγραμμένο τότε οι διαγώνιές του διέρχονται από το κέντρο του κύκλου. ☐ ☐

21. Στο διπλανό σχήμα είναι τόξο ΑΔ = 80° και τόξο ΓΔ = 50°. Η γωνία ΑΔx ισούται με:

Α. 80° **Β.** 90° **Γ.** 105° **Δ.** 115°



22. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο και η Α γωνία του είναι τετραπλάσια της Γ. Η γωνία Α ισούται με:

Α. 36° **Β.** 45° **Γ.** 72° **Δ.** 90° **Ε.** 144°

23. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο που ορίζεται με κορυφές τα σημεία τομής των διχοτόμων ενός τετραπλεύρου είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

24. Να αποδείξετε ότι:

α) Τέσσερις εφαπτόμενες ευθείες ενός κύκλου, παράλληλες ανά δύο, σχηματίζουν ένα ρόμβο περιγεγραμμένο στον κύκλο.

β) Το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία επαφής των παραπάνω εφαπτομένων με τον κύκλο είναι ορθογώνιο.

25. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R). Έστω Η το ορθόκεντρο και Μ το μέσο της ΒΓ. Φέρνουμε χορδή ΓΣ ⊥ ΒΓ. Να αποδείξετε ότι :

α. ΑΣ ⊥ ΑΒ,

β. ΑΗΓΣ παραλληλόγραμμο,

γ. 2ΟΜ = ΑΗ.

26. Από το μέσο Γ ενός τόξου ΑΒ κύκλου με κέντρο Ο γράφουμε δύο χορδές ΓΔ και ΓΕ που τέμνουν τη χορδή ΑΒ στα σημεία Ζ και Η. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΗΖΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

27. Από σημείο Ρ του ύψους ΑΔ οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε ΡΕ ⊥ ΑΒ και ΡΖ ⊥ ΑΓ.

α) Να αντιστοιχήσετε κάθε γωνία της στήλης (Α) με την ίση γωνία της στήλης (Β).

Στήλη (Α)	**Στήλη (Β)**
$\hat{AZE}$	$\hat{A\Gamma\Delta}$

	$\widehat{APE}$
$\widehat{APZ}$	$\widehat{EAP}$
	$\widehat{AEZ}$
$\widehat{PEZ}$	$\widehat{PAZ}$

β) Αποδείξτε ότι το τετράπλευρο ΒΕΖΓ είναι εγγράψιμο.

γ) Τα εγγράψιμα τετράπλευρα του σχήματος σε αριθμό είναι:

Α. 2 **Β.** 3 **Γ.** 4 **Δ.** 5 **Ε.** 6

28. Από το μέσο Ρ τόξου ΑΒ ενός κύκλου φέρνουμε τις χορδές ΡΚ και ΡΛ, που τέμνουν την χορδή ΑΒ στα Ν και Μ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το ΚΛΜΝ είναι εγγράψιμο.

29. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) περιγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου Ο. Αν Ε, Δ, Θ είναι αντίστοιχα τα σημεία επαφής των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ με τον κύκλο και η διακεντρική ευθεία από το Α κόβει τον κύκλο στα σημεία Ζ και Δ, να δείξετε ότι η γωνία ΑΒΓ ισούται με τη γωνία ΑΟΘ.

30. Δίνεται πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ που έχει ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΕ και Β = Γ = Δ. Να αποδείξετε ότι το πεντάγωνο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

31. Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα να αποδειχθεί ότι:

α) Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι περί τα τρίγωνα ΑΖΕ, ΒΔΖ και ΓΕΔ είναι ίσοι.

β) Οι τρεις παραπάνω κύκλοι του ερωτήματος (α) διέρχονται από το κέντρο Ο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

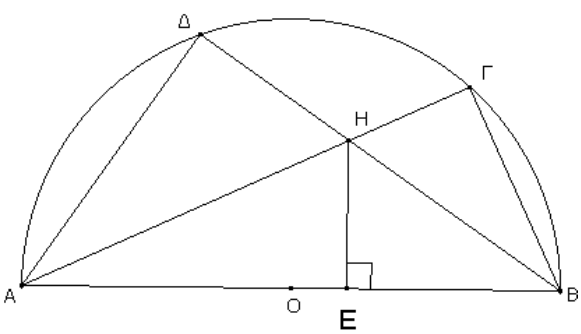
32. Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει Α = 90° και Β = 30°, το ΑΗ ύψος και την ΑΜ διάμεσο. Από το σημείο Β φέρνουμε τη ΒΕ κάθετη στην προέκταση της ΑΜ. Να αποδειχθεί ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΒΕΗ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

β) ΒΕ = ΕΗ = ΑΗ.

33. Στο διπλανό σχήμα έχουμε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και από το σημείο τομής Η των χορδών του ΑΓ και ΒΔ φέρνουμε την κάθετη στην διάμετρο.

Α. Να σημειώσετε στη κόλλα σας ποια από τις παρακάτω προτάσεις είναι



σωστές.

I. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι πάντα τραπέζιο.

II. Τα Γ και Δ βλέπουν την ΑΒ με οξείες γωνίες

III. Τα ΑΔΗΕ και ΒΓΗΕ είναι εγγράψιμα

IV. Είναι $\mathrm{E\hat{H}B = B\hat{A}\Delta}$

Β. Αν Ζ είναι το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΓ να δείξετε ότι το Η είναι το ορθόκεντρο του ΑΒΖ και να εξηγήσετε γιατί η ΕΗ διέρχεται από το Α.

34. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ, τα συμμετρικά σημεία του ορθοκέντρου του ως προς τις πλευρές του είναι σημεία του περιγεγραμμένου κύκλου.
(Υποδ. Παρατηρείστε ότι το ορθόκεντρο , τα ίχνη δύο υψών και η τρίτη κορυφή ορίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο)

35. Θεωρούμε τεταρτοκύκλιο $\overset{\frown}{AB}$, σημείο Κ πάνω σε αυτό και γράφουμε τον κύκλο με κέντρο το Κ που εφάπτεται στην χορδή ΑΒ. Από τα Α και Β φέρνουμε τις εφαπτόμενες στον κύκλο Κ που τέμνονται στο Μ. Να δείξετε ότι:

α. Οι ΑΚ, ΒΚ είναι διχοτόμοι του ΜΑΒ,

β. Το ΑΜΒΟ είναι εγγράψιμο,

γ. Οι εφαπτόμενες τέμνονται κάθετα.

36. Ἔστω κύκλος (Ο, R), ΑΒ διάμετρος του, πού προεκτείνεται κατά ΒΚ. Γράφουμε το κύκλο (Κ, ΚΟ) πού τέμνει τον (Ο, R) στα Γ . Φέρνουμε την χορδή ΑΓ που προεκτεινόμενη τέμνει τον κύκλο (Κ, ΚΟ) στο Ρ. Ἄν Σ είναι το σημείο που τέμνει η ΑΒ τον κύκλο (Κ, ΚΟ) να ἀποδείξετε ὅτι:

α. Το τρίγωνο ΑΡΣ είναι ἰσοσκελές,

β. Η ΡΒ εἶναι ἐφαπτόμενη του (Ο, R) ὅταν ΒΚ=$\frac{R}{2}$.

37. Στο σχήμα είναι ΑΒΓ ισόπλευρο, Δ τυχαίο σημείο της ΒΓ, I_1, I_2 τα έγκεντρα των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΓΔ αντίστοιχα και Κ το περίκεντρο του AI_1I_2. Να δείξετε ότι το KI_1I_2 είναι ισόπλευρο.