1ο Γενικό Λύκειο Χανίων 2 Μαρ 2015
Τάξη Β3 θετικού προσανατολισμού

Ονοματεπώνυμο .... Ομάδα Α΄

Ανακεφαλαιωτική εξέταση στα Μαθηματικά θετικού προσανατολισμού

Θέμα 1ο: Να αναγράψετε **όλες** τις συνθήκες που ισχύουν, όταν δύο διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1, y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2, y_2)$ είναι συγγραμμικά. Μονάδες 15

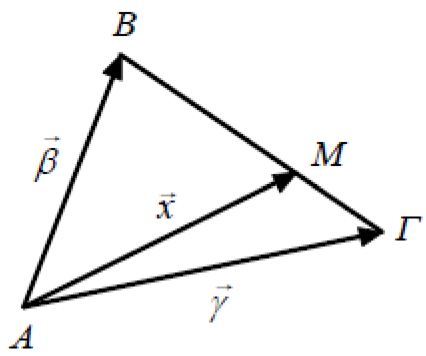
Θέμα 2ο: Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

α. Τι λέγεται γωνία του διανύσματος $\vec{\alpha}$; Μονάδες 4

β. Πότε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\vec{\alpha}}$ και με τι ισούται; Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}}\lambda_{\vec{\beta}}=-1$. Μονάδες 10

Θέμα 3ο: Αν στο διπλανό σχήμα είναι (ΒΜ)=2(ΜΓ) να αποδείξετε ότι $\vec{x}=\frac{1}{3}(\vec{\beta}+2\vec{\gamma})$.



Μονάδες 7

Θέμα 4ο : Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ. Αν $\overrightarrow{A\Delta}=\kappa\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}+\kappa\overrightarrow{A\Gamma}$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\Delta E}//\overrightarrow{B\Gamma}$ Μονάδες 8

Θέμα 5ο: Αν $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=\sqrt{2}$, $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, και $(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})\perp(2\vec{\alpha}+\vec{\beta})$ να δείξετε ότι $||\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$.

Μονάδες 10

Θέμα 6ο: Έστω Ο και Α δύο σταθερά σημεία του επιπέδου με (ΟΑ) = 3. Αν για το Μ ισχύει η σχέση $\overrightarrow{OM}(\overrightarrow{OM}-2\overrightarrow{OA})=7$ τότε $|\overrightarrow{AM}|=4$ Μονάδες 10

Θέμα 7ο : Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΔ το ύψος στην υποτείνουσα.
Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{B\Delta}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$ Μονάδες 8

Θέμα 8ο : Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-1, 3)$ και $\vec{\beta}=(1, 7)$.

α. Να βρεθεί το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων Μονάδες 7

β. Να αναλύσετε το $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες , από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha}$. Μονάδες 15 των θεμάτων

Ομάδα Α'

Θέμα 1ο: Όταν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$, $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ και $\vec{\alpha}\parallel\vec{\beta}$ ισχύουν:

α. $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ για $\lambda\in\mathbb{R}$

β. $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=\left||\vec{\alpha}|\pm|\vec{\beta}|\right|$

γ. $\det(\vec{\alpha},\vec{\beta})=0$

δ. $\lambda_{\vec{\alpha}}=\lambda_{\vec{\beta}}$ (εφ' όσον $x_1,x_2\neq 0$)

ε. $|\vec{\alpha}\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$

Θέμα 2ο: Θεωρία.

Θέμα 3ο: Επειδή $(BM)=2M\Gamma$ και $\vec{BM}\uparrow\uparrow\vec{M\Gamma}$ είναι $\vec{BM}=2\vec{M\Gamma}$

άρα $\vec{AM}-\vec{AB}=2(\vec{A\Gamma}-\vec{AM})$ ή $\vec{x}-\vec{\beta}=2\vec{\gamma}-2\vec{x}\Rightarrow$

$$3\vec{x}=\vec{\beta}+2\vec{\gamma}\Rightarrow\vec{x}=\frac{1}{3}(\vec{\beta}+2\vec{\gamma})$$

Θέμα 4ο: Είναι $\vec{\Delta E}=\vec{AE}-\vec{A\Delta}$

$$=\kappa\vec{AB}+\lambda\vec{A\Gamma}-\lambda\vec{AB}-\kappa\vec{A\Gamma}$$

$$=\kappa(\vec{AB}-\vec{A\Gamma})-\lambda(\vec{AB}-\vec{A\Gamma})=(\kappa-\lambda)\vec{\Gamma B}$$

άρα $\vec{\Delta E}\parallel\vec{\Gamma B}$ ή $\Delta E\parallel B\Gamma$.

Θέμα 5ο: Είναι $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=\sqrt{2}\Rightarrow(\vec{\alpha}+\vec{\beta})^2=2\Rightarrow$

$$\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=2\xRightarrow{\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}}\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2=2 \quad (1)$$

$$(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})\perp(2\vec{\alpha}+\vec{\beta})\Rightarrow(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})(2\vec{\alpha}+\vec{\beta})=0\Rightarrow$$

$$2\vec{\alpha}^2+\vec{\alpha}\vec{\beta}-4\vec{\alpha}\vec{\beta}-2\vec{\beta}^2=0\xRightarrow{(\vec{\alpha}\perp\vec{\beta})}$$

$$\vec{\alpha}^2=\vec{\beta}^2 \quad (2)$$

Οπότε $(1)\xRightarrow{(2)}2\vec{\alpha}^2=2\Rightarrow\vec{\alpha}^2=1\Rightarrow|\vec{\alpha}|=1$

και $|\vec{\beta}|=1$

Θέμα 6ο: $\vec{OM}(\vec{OM}-2\vec{OA})=7\Rightarrow(\vec{OA}+\vec{AM})(\vec{OA}+\vec{AM}-2\vec{OA})=7$

$$\Rightarrow(\vec{AM}+\vec{OA})(\vec{AM}-\vec{OA})=7\Rightarrow\vec{AM}^2-\vec{OA}^2=7$$

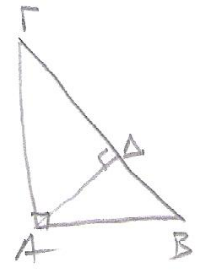
$$\xRightarrow{|OA|=3}\vec{AM}^2-9=7\Rightarrow|\vec{AM}|^2=16\Rightarrow|\vec{AM}|=4.$$

Θέμα 7ο: $\vec{AB}^2=\vec{AB}\cdot\vec{AB}=\vec{AB}\cdot\text{προβ}_{\vec{AB}}\vec{\Gamma B}$

$$=\vec{AB}\cdot\vec{\Gamma B}=\text{προβ}_{\vec{B\Gamma}}(\vec{AB})\cdot\vec{\Gamma B}$$

$$=\vec{\Delta B}\cdot\vec{\Gamma B}=$$

$$=\vec{B\Delta}\cdot\vec{B\Gamma}.$$



1ο Γενικό Λύκειο Χανίων 2 Μαρ 2015

Τάξη Β3 θετικού προσανατολισμού

Ονοματεπώνυμο .... Ομάδα Β΄

Ανακεφαλαιωτική εξέταση στα Μαθηματικά θετικού προσανατολισμού

Θέμα 1ο: Να αναγράψετε **όλες** τις συνθήκες που ισχύουν, όταν δύο διανύσματα $\vec{\alpha}=(x_1, y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2, y_2)$ είναι συγγραμμικά. Μονάδες 15

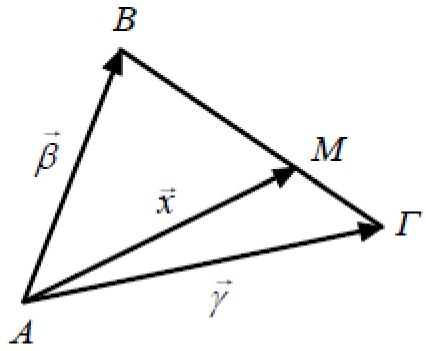
Θέμα 2ο: Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

α. Τι λέγεται γωνία του διανύσματος $\vec{\alpha}$; Μονάδες 4

β. Πότε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\vec{\alpha}}$ και με τι ισούται; Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{\alpha}}\lambda_{\vec{\beta}}=-1$. Μονάδες 10

Θέμα 3ο: Αν στο διπλανό σχήμα είναι (ΒΜ)=3(ΜΓ) να αποδείξετε ότι $\vec{x}=\frac{1}{4}(\vec{\beta}+3\vec{\gamma})$.



Μονάδες 7

Θέμα 4ο : Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ. Αν $\overrightarrow{A\Delta}=\kappa\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}+\kappa\overrightarrow{A\Gamma}$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\Delta E}//\overrightarrow{B\Gamma}$ Μονάδες 8

Θέμα 5ο: Αν $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$, $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\perp(\vec{\alpha}-3\vec{\beta})$ και $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=2$, δείξτε ότι $|\vec{\alpha}|=\sqrt{3}$ και $|\vec{\beta}|=1$

Μονάδες 10

Θέμα 6ο: Έστω Ο και Α δύο σταθερά σημεία του επιπέδου με (ΟΑ) = 4. Αν για το Μ ισχύει η σχέση $\overrightarrow{OM}(\overrightarrow{OM}-2\overrightarrow{OA})=9$ τότε $|\overrightarrow{AM}|=5$ Μονάδες 10

Θέμα 7ο : Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΔ το ύψος στην υποτείνουσα.

Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{A\Delta}^2=\overrightarrow{B\Delta}\cdot\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ Μονάδες 8

Θέμα 8ο : Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(-1, 3)$ και $\vec{\beta}=(4, 8)$.

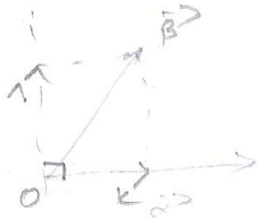
α. Να βρεθεί το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων Μονάδες 7

β. Να αναλύσετε το $\vec{\beta}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες , από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha}$. Μονάδες 15

Θέμα 8ο: α. Είναι $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \dfrac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|} =$

$$= \frac{-1+21}{\sqrt{1+9}\cdot\sqrt{1+49}} = \frac{20}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{50}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

β. $\vec{OK} = \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \dfrac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\vec{\alpha}^2}\vec{\alpha}$



$$= \frac{20}{10}(-1,3)$$

$$= (-2,6)$$

$$\vec{O\Lambda} = \vec{\beta} - \vec{OK} = (1,7) - (-2,6) = (3,1)$$

Ομαδα Β'

Θέμα 1 όπως ομάδας Α'

Θέμα 2 Θεωρία

Θέμα 3ο: Επειδή $(BM) = 3(M\Gamma)$ και $\vec{BM} \uparrow\uparrow \vec{M\Gamma}$ είναι $\vec{BM} = 3\vec{M\Gamma} \Rightarrow$

$$\vec{AM} - \vec{AB} = 3(\vec{A\Gamma} - \vec{AM}) \Rightarrow \vec{x} - \vec{\beta} = 3\vec{\gamma} - 3\vec{x} \Rightarrow 4\vec{x} = \vec{\beta} + 3\vec{\gamma}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \frac{1}{4}(\vec{\beta} + 3\vec{\gamma})$$

Θέμα 4ο: Όπως της ομάδας Α.

Θέμα 5ο: $(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}) \Rightarrow (\vec{\alpha}+\vec{\beta})(\vec{\alpha}-3\vec{\beta}) = 0 \Rightarrow$

$$\vec{\alpha}^2 - 3\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\alpha}\vec{\beta} - 3\vec{\beta}^2 = 0 \xRightarrow{\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}} \vec{\alpha}^2 - 3\vec{\beta}^2 = 0 \ (1)$$

$$|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2 \Rightarrow (\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2 = 4 \Rightarrow \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 4 \xRightarrow{\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}}$$

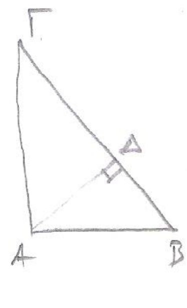
$$\Rightarrow \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2 = 4. \ (2)$$

$$(2) \xRightarrow{(1)} 3\vec{\beta}^2 + \vec{\beta}^2 = 4 \Rightarrow \vec{\beta}^2 = 1 \Rightarrow |\vec{\beta}| = 1 \text{ και}$$

$$\vec{\alpha}^2 = 3 \text{ (από (1)) άρα } |\vec{\alpha}| = \sqrt{3}.$$

Θέμα 6ο όπως ομάδας Α.

Θέμα 7ο Είναι $\vec{A\Delta}^2 = \vec{A\Delta}\cdot\pi\rho o\beta_{\vec{A\Delta}}(\vec{AB}) = \vec{A\Delta}\cdot\vec{AB}$



$$= (\vec{\Gamma\Delta} - \vec{\Gamma A})\vec{AB} = \vec{\Gamma\Delta}\cdot\vec{AB} - \cancel{\vec{\Gamma A}\cdot\vec{AB}}^{\,0}$$

$$= \vec{\Gamma\Delta}\cdot\vec{\Delta B} = \vec{B\Delta}\cdot\vec{\Delta\Gamma}.$$

Θέμα 8. α. $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \dfrac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|} = \dfrac{-4+24}{\sqrt{1+9}\cdot\sqrt{16+64}} = \dfrac{20}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{80}}$

$$= \frac{20}{2\sqrt{2}\cdot 10} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

β. $\vec{OK} = \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}(\vec{\beta}) = \dfrac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\vec{\alpha}^2}\vec{\alpha} = \dfrac{20}{\sqrt{10}^2}(-1,3) = (-2,6)$

$$\vec{O\Lambda} = \vec{B} - \vec{OK} = (4,8) - (-2,6) = (6,2).$$