Ονοματεπώνυμο...

1ο Γενικό Λύκειο Χανίων **ΣΧΟΛ. ΕΤΟΣ 23– 24**

Τάξη Β

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Θετικού Προσανατολισμού

Τα θέματα ΔΕΝ θα μεταφερθούν στο καθαρό.

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα

Οι απαντήσεις να γραφούν στο καθαρό

Τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι

Διάρκεια εξέτασης 2 ώρες

Θέμα 1ο

Α1 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας , δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

Α. Ο συντελεστής διεύθυνσης λ κάθε διανύσματος $\vec{\delta}=(x, y)$ είναι λ= $\frac{y}{x}$ **ΛΑΘΟΣ**

Β. Ισχύει ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$ αν και μόνο αν $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$. **ΛΑΘΟΣ**

Γ. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από την σχέση Ε= $\frac{1}{2}\det(\vec{AB},\vec{A\Gamma})$.**ΛΑΘΟΣ**

Δ. Η εκκεντρότητα μια έλλειψης $\varepsilon\in(0, 1)$. **ΣΩΣΤΗ**

Ε. Αν το σημείο $A(x_1,y_1)$ανήκει στην παραβολή $c:y^2=2px$, τότε και το σημείο $B(-x_1,y_1)$ανήκει σε αυτήν. **ΛΑΘΟΣ**

Μονάδες 10

Α2 .. Έστω $A(x_1,y_1)$και $B(x_2,y_2)$δυο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου και έστω (x, y) είναι οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ. Να αποδείξετε ότι $x=\frac{x_1+x_2}{2}$ και $y=\frac{y_1+y_2}{2}$

Θεωρία σελ. 33 **Μονάδες 15**

Θέμα 2ο (15825)

Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ **με** $|\vec{\alpha}|=2$ **,** $|\vec{\beta}|=4$ **,** $(\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\beta})=\frac{\pi}{3}$ **και το** $\vec{\gamma}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$**.**

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=4$**.** **Μονάδες 8**

β) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=0$**.** **Μονάδες 10**

γ) Να βρείτε τη $\left(\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\gamma}\right)$**.** **Μονάδες 7**

Λύση

α. Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ **=** $|\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}$ **=2·4·** $\frac{1}{2}$ **=4**

β. Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=\vec{\alpha}^2-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=$ **2^2–4=0**

γ. Από το β. είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}=0$ $\Rightarrow \vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ $\Rightarrow \left(\vec{\alpha}\,\hat{,}\,\vec{\gamma}\right)$ **=** $\frac{\pi}{2}$

Θέμα 3º

Δίνεται ο κύκλος c:$x^2+y^2-6x+1=0$ και η παραβολή (π) με άξονα συμμετρίας τον άξονα χ΄χ, κορυφή την αρχή των αξόνων και διευθετούσα την ευθεία δ:$x = -1$.

α. Να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα ρ του κύκλου (c) Μονάδες 6

β. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής (π) Μονάδες 6

Αν π: $y^2=4x$

γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία των δύο κωνικών τομών

Μονάδες 6

δ. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της παραβολής (π) στα κοινά σημεία της με τον κύκλο (c), εφάπτονται και στον κύκλο. Μονάδες 7

Λύση

α. Κέντρο είναι το Κ($-\frac{-6}{2},-\frac{0}{2}$)=(3,0) και

ακτίνα ρ=$\frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+0^2-4\cdot 1} = \frac{1}{2}\sqrt{32} = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

β. Επειδή η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας τον $x΄x$ και κορυφή την αρχή των αξόνων έχει εξίσωση $y^2=2px$, όπου $p\neq 0$ η παράμετρος.

Όμως η διευθετούσα $x=-1$ έχει εξίσωση $x=-\frac{p}{2}$ επομένως p= 2 άρα η εξίσωση της (π) είναι $y^2 = 4x$.

γ. Είναι $\begin{cases} y^2=4x \\ x^2+y^2-6x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=4x \\ x^2+4x-6x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=4x \\ x^2-2x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=4x \\ (x-1)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=4x \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y^2=4 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y=-2 \\ x=1 \end{cases}$. Άρα τα κοινά σημεία του κύκλου και της παραβολής

είναι τα (1,2) και (1,–2).

δ. Στα σημεία (1, 2) και (1,–2) οι εφαπτόμενες της (π) είναι

$\varepsilon_1: 2y=2(x+1) \Leftrightarrow y=x+1 \Leftrightarrow x-y+1=0$ και

$\varepsilon_2: -2y=2(x+1) \Leftrightarrow y=-x-1 \Leftrightarrow x+y+1 = 0$

Επειδή $d(K, \varepsilon_1) = \frac{|3-0+1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} = \rho$ και

$d(K, \varepsilon_2) = \frac{|3+0+1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$ έπεται ότι οι ε_1 και ε_2 είναι εφαπτόμενες και στον κύκλο (c).

Θέμα 4ο
14978

Δίνονται τα σημεία $A(1,1), B(3,3)$.

α) Αν $M(x,y)$ σημείο του επιπέδου, να βρείτε τις αποστάσεις d_1, d_2 του Μ από τα Α και Β αντίστοιχα. Μονάδες 6

β) Να γράψετε τη σχέση που πρέπει να πληρούν οι d_1, d_2, ώστε το σημείο Μ να ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ. Μονάδες 4

γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ΑΒ. Μονάδες 8

δ) Να βρείτε σημείο Σ τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΣΑΒ να είναι ισόπλευρο. Μονάδες 7

Λύση

α. Είναι $d_1 = \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = \sqrt{x^2+y^2-2x-2y+2}$ και

$d_2 = \sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2} = \sqrt{x^2+y^2-6x-6y+18}$.

β. Επειδή η μεσοκάθετος ενός τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου του που ισαπέχουν από τα άκρα του η σχ'εση που πληρούν είναι η $d_1=d_2$.

γ. Από το β. ερώτημα θα πρέπει $\sqrt{x^2+y^2-2x-2y+2} = \sqrt{x^2+y^2-6x-6y+18} \Leftrightarrow$
$x^2+y^2-2x-2y+2 = x^2+y^2-6x-6y+18 \Leftrightarrow 4x+4y=16 \Leftrightarrow x+y=4$.

δ. Το ζητούμενο σημείο $\Sigma(x,y)$ θα είναι τέτοιο ώστε

$\Sigma A=\Sigma B=AB=\sqrt{(1-3)^2+(1-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ και ταυτόχρονα θα ανήκει στην μεσοκάθετο του ΑΒ.

Οπότε είναι $\begin{cases} x+y=4 \\ \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x \\ \sqrt{(x-1)^2+(4-x-1)^2} = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} y=4-x \\ x^2-2x+1+x^2-6x+9=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x \\ 2x^2-8x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x \\ x^2-4x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x \\ x=\dfrac{4\pm\sqrt{16-4}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x \\ x=\dfrac{4\pm2\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x \\ x=2\pm\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-\sqrt{3} \\ y=2+\sqrt{3} \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x=2+\sqrt{3} \\ y=2-\sqrt{3} \end{cases}.$$

Άρα $\Sigma(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$ ή $\Sigma(2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3})$.