

## Κύκλος

- 404.** Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:
- α) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα  $2\sqrt{2}$
  - β) έχει κέντρο το σημείο  $(3, -1)$  και ακτίνα 5
  - γ) έχει κέντρο το σημείο  $(-2, 1)$  και διέρχεται από το σημείο  $(-2, 3)$
  - δ) έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα AB με  $A(1, 3)$  και  $B(-3, 5)$
  - ε) διέρχεται από τα σημεία  $(2, 1)$ ,  $(1, 2)$  και  $(\frac{\sqrt{15}}{2}, \frac{1}{2})$
  - στ) διέρχεται από τα σημεία  $(3, 1)$ ,  $(-1, 3)$  και έχει κέντρο πάνω στην ευθεία  $y = 3x - 2$
  - ζ) έχει κέντρο το σημείο  $(8, -6)$  και διέρχεται από την αρχή των αξόνων
  - η) έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και εφάπτεται της ευθείας  $3x + y = 10$
  - θ) έχει ακτίνα 4, εφάπτεται στον άξονα  $x'x$  και διέρχεται από το σημείο  $(5, 4)$
  - ι) έχει κέντρο το σημείο  $(-3, 2)$ , εφάπτεται στον άξονα  $y'y$  και διέρχεται από το σημείο  $(-6, 2)$
  - ια) έχει κέντρο το σημείο  $(3, 3)$  και εφάπτεται των αξόνων  $x'x$  και  $y'y$
  - ιβ) έχει κέντρο το σημείο  $(-3, 1)$  και εφάπτεται στην ευθεία  $4x - 3y + 5 = 0$
- 405.** Να βρείτε την εξίσωση κύκλου:
- α. Ο οποίος διέρχεται από τα σημεία  $A(2,4)$ ,  $B(1, 2+\sqrt{3})$  και την αρχή των αξόνων.
  - β. Ο οποίος διέρχεται από τα σημεία  $A(-4, 0)$ ,  $B(1,1)$  και έχει κέντρο, σημείο της ευθείας  $\varepsilon: \chi + \psi = 0$ .
- 406.** Να βρείτε την εξίσωση κύκλου που διέρχεται από το σημείο  $A(1, 2)$  και το κέντρο του είναι το σημείο τομής των ευθειών με εξισώσεις  $\varepsilon_1: \chi - 2\psi + 5 = 0$  και  $\varepsilon_2: 2\chi + \psi - 2 = 0$ .
- 407.** Δίνονται τα σημεία  $A(1, 2)$ ,  $B(2, 4)$  και  $\Gamma(3, 1)$ .
- α) Να αποδειχθεί ότι: γωνία  $BA\Gamma = 90^\circ$
  - β) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$ .
- 408.** Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία  $A(3\alpha, 0)$ ,  $B(0, 3\alpha)$  και  $\Gamma(0, -3\alpha)$ ,  $\alpha > 0$ .

409. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει το κέντρο του στην ευθεία (ε):  $2x + y + 1 = 0$  και διέρχεται από τα σημεία A (- 1, 2) και B (3, - 1).
410. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου, ο οποίος είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο που σχηματίζει η ευθεία  $x + y - 6 = 0$  με τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ .
411. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από το σημείο (1, 0) και εφάπτεται στις ευθείες  $3x + y + 6 = 0$  και  $3x + y - 12 = 0$ .

### Εύρεση στοιχείων κύκλου

412. Να βρείτε την τιμή του  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ώστε η εξίσωση :  
 $\chi^2 + \psi^2 - 2\alpha\chi + 2\psi + 2\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0$ , να παριστάνει κύκλο και στην συνέχεια να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του.

413. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

| εξίσωση κύκλου                | κέντρο κύκλου | ακτίνα κύκλου | σημεία τομής κύκλου με άξονα $x'x$ | σημεία τομής κύκλου με άξονα $y'y$ |
|-------------------------------|---------------|---------------|------------------------------------|------------------------------------|
| $x^2 + (y - 4)^2 = 1$         |               |               |                                    |                                    |
| $x^2 + 2x + y^2 - 4y - 4 = 0$ |               |               |                                    |                                    |
| $x^2 + y^2 = 9$               |               |               |                                    |                                    |
| $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ |               |               |                                    |                                    |

414. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στην ευθεία  $y = x$  και είναι ομόκεντρος του κύκλου  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ .
415. Θεωρούμε τον κύκλο C:  $x^2 + y^2 + 4y = 0$  και το σημείο A (- 1, - 1). Να βρεθεί η εξίσωση ευθείας που ορίζει στον κύκλο χορδή, με μέσο το σημείο A.
416. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το κέντρο του κύκλου  $x^2 - 2x + y^2 - 6x = 0$  και είναι κάθετη στην ευθεία  $x + 2y - 7 = 0$ .
417. Να αποδειχθεί ότι το σύνολο των σημείων M (x, y) του επιπέδου που ικανοποιούν τις εξισώσεις  $\chi\sigma\eta\theta - \gamma\eta\mu\theta = \sigma\upsilon\nu 2\theta$  και  $\chi\eta\mu\theta + \gamma\sigma\upsilon\nu\theta = \eta\mu 2\theta$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ , βρίσκονται σε κύκλο.
418. Δίνονται τα σημεία A(5,0) και B(0,5). Να δείξετε ότι τα σημεία M( $\chi, \psi$ ) του επιπέδου για τα οποία ισχύει  $\frac{(MA)}{(MB)} = \frac{2}{3}$  είναι σημεία ενός κύκλου του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

419. Να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $M(x, y)$  του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων από τα  $A, B, \Gamma$  με  $A(1, -1), B(-1, 2), \Gamma(0, 2)$  είναι σταθερό, είναι κύκλος με κέντρο το βαρύκεντρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
420. Να βρεθεί η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι ομόκεντροι οι κύκλοι  $C_1: x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0$  και  $C_2: x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0$ .
421. Να δειχθεί ότι η εξίσωση  $x^2 + y^2 + \lambda x = 0$  παριστάνει κύκλο για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Να βρεθεί η γραμμή πάνω στην οποία βρίσκονται τα κέντρα αυτών των κύκλων.
422. Δίνονται τα σημεία  $A(-2, 2)$  και  $B(2, 4)$ .  
 α. Να δείξετε ότι τα σημεία  $M(\chi, \psi)$ , τέτοια ώστε  $(MA)^2 + (MB)^2 = 2\lambda$  είναι σημεία κύκλου  $C_\lambda$  αν και μόνο αν  $\lambda > 5$ .  
 β. Να βρείτε για ποια τιμή του  $\lambda$  ο  $C_\lambda$  εφάπτεται εξωτερικά με τον  $C: (\chi-4)^2 + \psi^2 = 1$ .
423. Δίνεται η εξίσωση  $C: \chi^2 + \psi^2 - 4\lambda\chi + 2(\lambda+1)\psi + 4\lambda^2 + 2\lambda = 0$ .  
 α. Να δείξετε ότι για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  η εξίσωση  $C$  είναι εξίσωση κύκλου, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.  
 β. Να δείξετε ότι το κέντρο του κύκλου βρίσκεται σε σταθερή ευθεία,  
 γ. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου του οποίου το κέντρο βρίσκεται στην ευθεία  $\epsilon: 5\chi + 4\psi - 8 = 0$ .
424. Δίνεται κύκλος  $C: (\chi - 1)^2 + (\psi - 2)^2 = 49$  και το σημείο  $A(4, 6)$ .  
 α. Να δείξετε ότι το  $A$  είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου  $C$ .  
 β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας της χορδής του κύκλου  $C$  που έχει μέσο το  $A$ .
425. Να αποδειχθεί ότι οι κύκλοι  $C_1: (x - 2)^2 + y^2 = 4$  και  $C_2: x^2 - 2x + y^2 = 0$  εφάπτονται εσωτερικά.

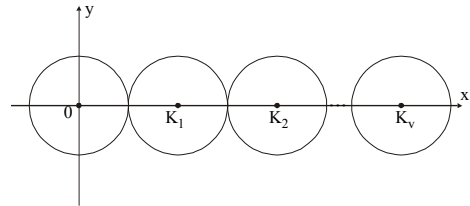
### **Εφαπτόμενες κύκλου**

426. Δίνεται η ευθεία  $y = \lambda x$  και ο κύκλος  $x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$ . Να βρεθεί η τιμή του  $\lambda$  ώστε η ευθεία:  
 α) να τέμνει τον κύκλο

- β) να εφάπτεται του κύκλου  
 γ) να μην έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.
427. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου  $x^2 + y^2 = 4$  που είναι παράλληλες στην ευθεία  $x + y = 0$ .
428. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου  $x^2 + y^2 = 9$  που γράφονται από το σημείο  $(0, 6)$ .
429. Δίνεται ο κύκλος  $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$  και η ευθεία  $y = x - 3$ . Να αποδείξετε ότι η ευθεία εφάπτεται του κύκλου και στη συνέχεια να βρείτε το σημείο επαφής.
430. Δίνεται η εξίσωση  $C: (2\lambda+1)x^2 + (3-2\lambda)y^2 - 12x - 16y + 24 = 0$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ .  
 α. Να δείξετε ότι η  $C$  παριστάνει κύκλο αν και μόνο αν  $\lambda=0$ .  
 β. Αν η  $C$  είναι κύκλος να βρείτε τις εφαπτόμενες από την αρχή των αξόνων.  
 γ. Να βρεθεί η εφαπτομένη της οξείας γωνίας των παραπάνω εφαπτομένων.

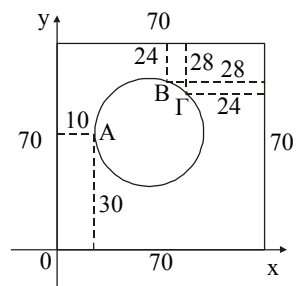
### Σύνθετες ασκήσεις - Θέματα

431. Στο διπλανό σχήμα ο πρώτος κύκλος  $C_0$  έχει εξίσωση  $x^2 + y^2 = \rho^2$  και όλοι οι κύκλοι είναι ίσοι. Να βρεθούν:



- α) οι εξισώσεις των κύκλων  $C_1, C_2, \dots, C_n$  (συναρτήσει του  $\rho$ )  
 β) το άθροισμα των αποστάσεων των κέντρων  $K_1, K_2, \dots, K_n$  από το κέντρο  $O$   
 γ) οι κοινές εφαπτόμενες όλων των κύκλων.

432. Σε μια τετράγωνη πλατεία πλευράς 70 m, υπάρχει μια μικρή τεχνητή λίμνη κυκλικού σχήματος. Προκειμένου να βρεθεί η ακτίνα της λίμνης, τρεις μαθητές επέλεξαν τρία τυχαία σημεία της περιφέρειάς της  $A, B, \Gamma$  και μέτρησαν τις αποστάσεις τους από τις πλευρές της πλατείας, όπως δείχνει το σχήμα.



- α) Στο σύστημα αξόνων  $Oxy$  να τοποθετήσετε τα σημεία  $A, B, \Gamma$ .  
 Να θεωρήσετε ότι η απόσταση 1 στους άξονες αντιστοιχεί σε 10 m.  
 β) Να υποθέσετε ότι η λίμνη έχει αντίστοιχο σχήμα στους άξονες τον κύκλο  $x^2 + y^2 + \kappa x + \lambda y + \mu = 0$  πάνω στον οποίο βρίσκονται τα  $A, B, \Gamma$ . Να υπολογίσετε

τα  $\kappa$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ .

γ) Να βρείτε την ακτίνα της λίμνης.

**433.** Δίνονται οι κύκλοι  $C_1: x^2 + y^2 = 1$  και  $C_2: (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$ .

α) Να δείξετε ότι δεν έχουν κοινό σημείο.

β) Να βρείτε την εξίσωση της διακέντρου.

γ) Από όλα τα ζεύγη σημείων  $(A, B)$ , όπου το  $A$  ανήκει στον  $C_1$  και το  $B$  στον  $C_2$ , να βρεθεί αυτό για το οποίο τα  $A, B$  απέχουν τη μικρότερη απόσταση.

δ) Να βρεθεί το ζεύγος σημείων  $(\Gamma, \Delta)$  (το  $\Gamma$  στον  $C_1$ , το  $\Delta$  στον  $C_2$ ) με τη μεγαλύτερη απόσταση.

**434.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου  $C$ :

$$x^2 + y^2 + 1 = 2x + 6y \text{ και είναι κάθετη στην ευθεία } \varepsilon: 2x + y + 5 = 0.$$

(Θέμα εξετάσεων)

**435.** Δίνονται τα σημεία  $A(-2, 0)$ ,  $B(2, 0)$  και  $M_1(1, \sqrt{3})$ .

α) Να δείξετε ότι  $M_1A \perp M_1B$ .

β) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που περνά από τα σημεία  $A, B, M_1$ .

γ) Να δείξετε ότι το σημείο  $M_2(-1, \sqrt{3})$  ανήκει στον κύκλο και  $M_2A \perp M_2B$ .

δ) Να δείξετε ότι κάθε σημείο  $M(x_0, y_0)$  για το οποίο ισχύει  $MA \perp MB$ , ανήκει στον κύκλο του ερωτήματος (β).

**436.** α. Να δείξετε ότι οι ευθείες:  $\varepsilon_1: x - 2y + 5 = 0$  και  $\varepsilon_2: x + y - 4 = 0$  τέμνονται και να προσδιορίσετε το σημείο τομής τους  $M$ .

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση  $x - 2y + 5 + \lambda(x + y - 4) = 0$  παριστάνει για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  ευθεία  $\varepsilon_\lambda$ , που διέρχεται από το σημείο τομής  $M$  των  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ .

Να βρείτε στην συνέχεια την ευθεία  $\varepsilon_\lambda$  που περνά από το κέντρο του κύκλου  $C$ :

$$x^2 + y^2 + 2y = 0$$

**437.** Δίνονται τα σημεία του επιπέδου  $A(1,3)$ ,  $B(-1,0)$ ,  $\Gamma(3,-1)$ .

α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το  $A$  και είναι κάθετη στην ευθεία  $B\Gamma$ .

β. Έστω  $C$  ο κύκλος με κέντρο το σημείο  $A$  και ακτίνα  $(AB)$ .

Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της ευθείας  $B\Gamma$  με τον παραπάνω κύκλο.

(Θέμα εξετάσεων)

- 438.** Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 2x\sin\theta - 2y\eta\mu\theta - 1 = 0$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ .
- A.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\theta$  η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο, του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.
- B.** Αν  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο  $M(1,2)$ .
- Γ.** Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του  $\theta$  τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο  $O(0,0)$  και ακτίνα  $\rho = 1$ . **(Θέμα 4/2002)**
- 439.** Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$  και το σημείο  $M(2,1)$ .
- α.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο  $K(2, -1)$  και ακτίνα  $\rho = \sqrt{2}$ .
- β.** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου που διέρχονται από το σημείο  $M(2,1)$ . **(Θέμα 4/2003 ΣΕΠ)**
- 440.** Θεωρούμε έναν πληθυσμό από 1999 μυρμήγκια. Κάθε μυρμήγκι χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό  $n=1,2,3,\dots,1999$  και κινείται επάνω στο καρτεσιανό επίπεδο  $Oxy$  διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση:  $(x-1)^2 + y^2 = 2n(x+y-1)$ .
- Να δείξετε ότι:
- α) η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του
- β) κατά την κίνησή τους όλα τα μυρμήγκια διέρχονται από ένα σταθερό σημείο  $A$  (που είναι η φωλιά τους). Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου  $A$ ;
- γ) οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας  $x+y-1=0$  στο σημείο  $A$ .
- 441.** Σε ένα καρτεσιανό επίπεδο θεωρούμε τα σημεία  $A(2\lambda-3, 0)$  και  $B(0, \lambda+6)$ , όπου  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι υπάρχουν δυο σταθερά σημεία του επιπέδου αυτού, από τα οποία το ευθ. τμήμα  $AB$  φαίνεται υπο ορθή γωνία, για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- 442.** **A.** Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$ , όπου  $\mu, \lambda$  πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή των  $\mu, \lambda$ , η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων  $O$ .
- B.** Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς  $\mu, \lambda$  ισχύει η σχέση  $3\mu + 2\lambda = 0$ .
- α.** Να δείξετε ότι, όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση

$x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$  για τις διάφορες τιμές των  $\mu$  και  $\lambda$ , έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

**β.** Να βρείτε τα  $\mu, \lambda$  έτσι, ώστε, αν  $A, B$  είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου

κύκλου με την ευθεία  $x + y + 2 = 0$ , να ισχύει  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$

**γ.** Για τις τιμές των  $\mu, \lambda$  που βρήκατε στο ερώτημα **β** να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AOB$ .

**443.** Να εξετάσετε αν η ευθεία  $y + x = 1$  είναι εφαπτομένη του κύκλου  $x^2 + y^2 = 1$ .

**444.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου  $C: x^2 + y^2 = 20$  στο σημείο του  $A(-4, 2)$ .

**445.** Δίνεται η ευθεία  $y = \lambda x$  και ο κύκλος  $x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$ . Να βρεθεί η τιμή του  $\lambda$  ώστε η ευθεία:

α) να τέμνει τον κύκλο

β) να εφάπτεται του κύκλου

γ) να μην έχει κοινά σημεία με τον κύκλο

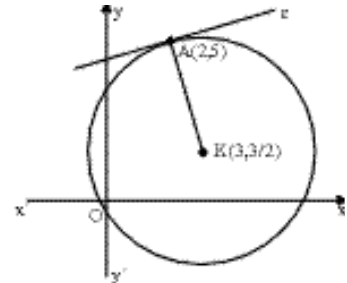
**446.** Να βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε η ευθεία  $y = x + \lambda$  να εφάπτεται του κύκλου  $x^2 + (y - 1)^2 = 5$ .

**447.** Στο διπλανό σχήμα να βρείτε:

α) το συντελεστή διεύθυνσης της ακτίνας  $KA$

β) το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης  $\varepsilon$

γ) τις εξισώσεις των ευθειών  $KA$  και  $\varepsilon$ .

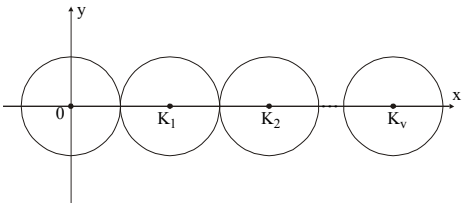


**448.** Δίνεται ο κύκλος  $C: x^2 + y^2 - 4x = 0$  και η ευθεία  $\varepsilon: y = \alpha x + \beta$ .

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $\varepsilon$ , είναι εφαπτόμενη του κύκλου  $C$ , αν και μόνον αν  $\beta^2 = 4 - 4\alpha\beta$ .

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου  $C$ , η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\alpha = \frac{3}{4}$ .

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων, οι οποίες άγονται από το σημείο  $M(0, 1)$ .

449. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου  $x^2 + y^2 = 4$  που είναι παράλληλες στην ευθεία  $x + y = 0$ .
450. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου  $x^2 + y^2 = 9$  που γράφονται από το σημείο  $(0, 6)$ .
451. Δίνεται ο κύκλος  $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$  και η ευθεία  $y = x - 3$ . Να αποδείξετε ότι η ευθεία εφάπτεται του κύκλου και στη συνέχεια να βρείτε το σημείο επαφής.
452. Στο διπλανό σχήμα ο πρώτος κύκλος  $C_0$  έχει εξίσωση  $x^2 + y^2 = \rho^2$  και όλοι οι κύκλοι είναι ίσοι. Να βρεθούν:
- 
- α) οι εξισώσεις των κύκλων  $C_1, C_2, \dots, C_v$  (συναρτήσεις του  $\rho$ )
- β) το άθροισμα των αποστάσεων των κέντρων  $K_1, K_2, \dots, K_v$  από το κέντρο  $O$
- γ) οι κοινές εφαπτόμενες όλων των κύκλων.
453. Δίνεται η εξίσωση  $\chi^2 + \psi^2 - 6\chi + 4\psi + \kappa = 0, \kappa \in \mathbb{R}$
- α) Να υπολογιστεί το  $\kappa$  ώστε η παραπάνω εξίσωση να παριστάνει κύκλο  $C$ .
- β) Να υπολογιστεί το  $\kappa$  ώστε ο παραπάνω κύκλος να έχει ακτίνα  $\rho = 1$ .
- γ) Αν  $M(4, 2)$  να αποδειχθεί ότι το  $M$  είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου  $C$  για την τιμή του  $\kappa$  που προσδιορίσατε στο (β) ερώτημα,
- δ) Να αποδειχθεί ότι από το σημείο  $M$  ágονται δύο εφαπτόμενες του κύκλου  $C$ .
- ε) Να υπολογιστεί το συνημίτονο της οξείας γωνίας των δύο αυτών εφαπτόμενων.
454. Δίνεται κύκλος με κέντρο  $K(3, 2)$ , ακτίνα  $\rho = 2$  και το σημείο  $A(5, 5)$ .
- α) Να αποδειχθεί ότι ο κύκλος εφάπτεται του άξονα  $\chi\chi$ ,
- β) Να αποδειχθεί ότι το σημείο  $A$  είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου και να βρείτε τις εφαπτόμενες του κύκλου που ágονται από το  $A$ .
- γ) Αν  $AB\Gamma$  είναι το τρίγωνο που σχηματίζεται από τις παραπάνω εφαπτόμενες και τον άξονα  $\chi\chi$  να βρεθούν τα σημεία στα οποία οι διχοτόμοι των οξείων γωνιών του  $AB\Gamma$  τέμνουν τις απέναντι πλευρές του.

### Παραβολή

455. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή το  $(0, 0)$  στις παρακάτω περιπτώσεις:
- α) είναι συμμετρική ως προς το θετικό ημιάξονα  $Ox$  και έχει παράμετρο  $p = 5$

- β) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα  $Ox$  και διέρχεται από το σημείο  $(-1, 4)$   
 γ) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα  $Oy$  και διέρχεται από το σημείο  $(2, 2)$   
 δ) έχει άξονα συμμετρίας τον  $Oy$  και εστία  $E(0, -4)$   
 ε) έχει εστία  $E(-2, 0)$  και διευθετούσα  $\delta: x - 2 = 0$   
 στ) έχει άξονα συμμετρίας τον  $Ox$  και εφαπτεται της ευθείας  $y = 4x + 1$
- 456.** Να βρεθεί η σχετική θέση της ευθείας  $x + y + 1 = 0$  ως προς την παραβολή  $y^2 = 2x$ .
- 457.** Έστω η παραβολή  $y^2 = 4px$ ,  $p > 0$ . Μια χορδή της  $AB$  είναι κάθετη στον άξονα και έχει μήκος  $8p$ . Να αποδειχθεί ότι  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ .
- 458.** Ισόπλευρο τρίγωνο  $OAB$  είναι εγγεγραμμένο στην παραβολή  $y^2 = 4px$  με κορυφή το  $O$ . Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.
- 459.** Έστω η παραβολή  $C: y^2 = 2px$  και μια χορδή της  $AB$  παράλληλη με τον άξονα  $y'y$ , η οποία περνάει από την εστία.  
 Να αποδειχθεί ότι:  
 α.  $(AB) = 2(EK)$ , όπου  $K$  το σημείο που τέμνει ο άξονας  $x'x$  τη διευθετούσα  
 β. οι εφαπτόμενες στα  $A$  και  $B$  διέρχονται από το  $K$
- 460.** Δίνεται η παραβολή  $C: y^2 = 2px$  και δύο χορδές  $OB$ ,  $OG$ , ώστε γωνία  $BOG = 90^\circ$ . Να αποδειχθεί ότι η  $BG$  διέρχεται από σταθερό σημείο.
- 461.** Δίνεται η παραβολή  $2y^2 = x$ . α) Να βρεθούν η εστία και η διευθετούσα της.  
 β) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου της  $A(2, 1)$  από την εστία  $E$  και να συγκριθεί με την απόσταση  $(OE)$ .  
 γ) Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραβολή το σημείο της με τη μικρότερη απόσταση από την εστία είναι η κορυφή της  $O$ .  
 δ) Να βρεθεί σημείο στην παραβολή  $y^2 = 2px$  που να απέχει από την εστία  $E$  απόσταση διπλάσια της  $OE$ .
- 462.** Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 4x$  και η ευθεία  $(\epsilon): y = x - 1$ .  
 α) Να δείξετε ότι η  $(\epsilon)$  περνά από την εστία της παραβολής.  
 β) Να βρείτε τα κοινά σημεία  $A, B$  της  $(\epsilon)$  και της παραβολής.  
 γ) Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία  $A, B$  είναι κάθετες.  
 δ) Να δείξετε ότι κάθε ευθεία που περνά από την εστία και τέμνει την παραβολή σε δύο σημεία έχει την ιδιότητα  $(\gamma)$ .

- 463.** Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 2px$ . Θέτουμε  $x' = ax$  και  $y' = ay$ ,  $a \neq 0$ . Να αποδειχθεί ότι το σημείο  $(x', y')$  κινείται πάλι σε παραβολή.
- 464.** Δίνονται τα σημεία του επιπέδου  $(x, y) = (2pk^2, 2pk)$  με  $k \in \mathbb{R}$ .  
 α) Να αποδειχθεί ότι τα σημεία αυτά ανήκουν σε μια παραβολή  
 β) Αν  $A(2pk_1^2, 2pk_1)$ ,  $B(2pk_2^2, 2pk_2)$  είναι δύο σημεία της παραβολής αυτής, να αποδειχθεί ότι αν η  $AB$  διέρχεται από την εστία, είναι  $4k_1k_2 = -1$ .
- 465.** Δίνεται σταθερό σημείο  $A$  και ευθεία  $(\epsilon)$  που δεν διέρχεται από το  $A$ . Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που διέρχονται από το  $A$  και εφάπτονται στην  $(\epsilon)$ , είναι παραβολή.
- 466.** Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων της παραβολής  $y^2 = 3x$  στα σημεία  $(0, 0)$  και  $(12, 6)$ .
- 467.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής  $y^2 = 3x$  που είναι παράλληλη στην ευθεία  $2x - y + 1999 = 0$ .
- 468.** Από το σημείο  $(-2, 3)$  προς την παραβολή  $y^2 = 8x$  γράφονται δύο εφαπτόμενες ευθείες  
 α. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων αυτών ευθειών.  
 β. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές ευθείες είναι κάθετες.
- 469.** Να βρείτε την εξίσωση κύκλου, που διέρχεται από το σημείο  $A(0,1)$  και εφάπτεται στην παραβολή  $C: y = x^2$  στο σημείο  $B(2,4)$ .  
 (Δηλαδή έχουν κοινή εφαπτομένη στο  $B$ )
- 470.** Δίνεται ο κύκλος  $x^2 + y^2 = 2$  και η παραβολή  $y^2 = 8x$ .  
 α. Να βρεθούν οι κοινές εφαπτόμενες του κύκλου και της παραβολής.  
 β. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές είναι κάθετες.
- 471.** Η παραβολή με εξίσωση  $y^2 = ax$  διέρχεται από το σημείο  $A(2,4)$ , όπου  $a \in \mathbb{R}$   
 α. Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο  $E(2,0)$ .  
 β. Έστω  $E'$  το συμμετρικό της εστίας  $E$  ως προς τον άξονα  $y'y$ .  
 Αν  $M(x,y)$  είναι ένα οποιοδήποτε σημείο για το οποίο ισχύει  $\overrightarrow{ME'}^2 = \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{E'E}$  να αποδείξετε ότι το σημείο  $M(x,y)$  ανήκει στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων  $O(0,0)$  και ακτίνα 2.

- γ. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του παραπάνω κύκλου που διέρχονται από το σημείο Α.
- 472.** Έστω η παραβολή  $C: \psi^2 = 4\chi$  και μια ευθεία  $\epsilon$ , που διέρχεται από την εστία  $E$  της παραβολής και την τέμνει στα σημεία  $A$  και  $B$ . Έστω ακόμα  $\Gamma, \Delta$  οι προβολές των  $A, B$  αντίστοιχα στην διευθετούσα της παραβολής  $C$ , και  $M$  το μέσο του  $\Gamma\Delta$ .
- α.) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των  $A, B, \Gamma, \Delta, M$  ως συνάρτηση της τεταγμένης του  $A$ .
- β) Να αποδείξετε ότι η αρχή των αξόνων είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του τραπέζιου  $AB\Delta\Gamma$ .
- γ) Να αποδείξετε ότι  $\hat{A}MB = 90^\circ$  και ότι το  $ME$  είναι το ύψος του τριγώνου  $AMB$ .
- δ) Να δείξετε ότι  $\hat{G}\hat{E}\hat{\Delta} = 90^\circ$  και να υπολογίσετε το μήκος του  $ME$  συναρτήσει της τεταγμένης του  $A$ .
- 473.** Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 4x$ . Να βρείτε:
- A.** την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής
- B.** τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,
- Γ.** την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = x - 1$ .
- 474.** Δίνονται οι παραβολές  $C_1: \psi^2 = 2\rho\chi$  και  $C_2: \chi^2 = 2\rho\psi$ .
- α.** να δείξετε ότι έχουν κοινή κορυφή και τέμνονται σε ένα ακόμα σημείο  $A$ ,
- β.** έστω ότι οι εφαπτόμενες στο  $A$  τέμνουν τις  $C_2, C_1$  στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα.:
- ι.** να βρείτε τα σημεία  $B$  και  $\Gamma$
- ιι.** να δείξετε ότι η ευθεία  $B\Gamma$  είναι κοινή εφαπτόμενη στις δύο παραβολές.
- 475.** Δίνονται η παραβολή  $C: \chi^2 = 4\psi$  και η ευθεία  $\epsilon: \psi = (\alpha - 1)\chi + 1$ .
- Να δείξετε ότι :
- α.** Οι δύο γραμμές τέμνονται σε δύο σημεία  $K, \Lambda$  για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,
- β.** Οι εφαπτόμενες  $\epsilon_1, \epsilon_2$  της παραβολής στα  $K, \Lambda$  τέμνονται κάθετα.
- γ.** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του σημείου τομής των  $\epsilon_1, \epsilon_2$ .

476. Να γραφεί η εξίσωση της έλλειψης που έχει μεγάλο και μικρό άξονα με μήκος 6 και 4 μονάδες αντιστοίχως και έχει εστίες πάνω στον άξονα  $x'x$  συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων.
477. Να εξετάσετε αν υπάρχει έλλειψη στην οποία ένα σημείο της  $M$  να σχηματίζει με τις εστίες  $E'$  και  $E$  ισόπλευρο τρίγωνο.
478. Ο κύκλος με κέντρο το  $O(0, 0)$  και ακτίνα  $\beta$  διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης  $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  με  $\alpha > \beta$ . Να βρεθεί η εκκεντρότητα της έλλειψης.
479. Να βρείτε σημεία της έλλειψης  $C: \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{15} = 1$ , που απέχουν από το μικρό άξονα της, 3 μονάδες.
480. Να βρείτε σημεία της έλλειψης  $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ , τέτοια ώστε  $\widehat{ME} = 90^\circ$ , όπου  $E', E$  είναι οι εστίες της έλλειψης.
481. Δίνεται ο κύκλος  $x^2 + y^2 = 4$  και η έλλειψη  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1$ .
- α) Να δείξετε ότι το σημείο  $(1, -\sqrt{3})$  είναι κοινό τους σημείο και στη συνέχεια να βρείτε όλα τα κοινά σημεία.
- β) Να δείξετε ότι τα κοινά τους σημεία είναι κορυφές ορθογωνίου παραλληλογράμμου.
- γ) Να βρεθούν τα σημεία  $M(x_0, y_0)$  ώστε  $x_0^2 + y_0^2 = 4$  και  $(E'M) + (EM) = 2\sqrt{6}$  ( $E', E$  οι εστίες της έλλειψης).
482. Δίνεται η έλλειψη  $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ .
- α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο  $E'BEB'$  είναι ρόμβος ( $E', E$  οι εστίες,  $B, B'$  τα άκρα του μικρού άξονα)
- β) Να βρεθεί το εμβαδόν του ρόμβου.
483. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της έλλειψης  $9x^2 + 16y^2 = 144$  που είναι:
- α) παράλληλες προς την ευθεία ( $\epsilon$ ):  $x + y = 0$
- β) κάθετες στην ευθεία ( $\epsilon$ ).

484. Δίνονται οι ελλείψεις  $c_1: \frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$  και  $c_2: \alpha^2 \chi^2 + \beta^2 \psi^2 = 1$  με  $0 < \alpha < \beta$ . Η

ημιευθεία  $\psi = (\epsilon\phi\theta)\chi$ ,  $\chi > 0$ ,  $0 < \theta < \pi/2$  τέμνει την  $c_1$  στο  $\Gamma_1(\chi_1, \psi_1)$  και την  $c_2$  στο  $\Gamma_2(\chi_2, \psi_2)$ .

Αν  $\lambda_1$  είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτόμενης της  $c_1$  στο  $\Gamma_1$  και  $\lambda_2$  είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της  $c_2$  στο  $\Gamma_2$  να αποδείξετε ότι το γινόμενο  $\lambda_1 \lambda_2$  είναι ίσον με  $(\epsilon\phi\theta)^{-2}$

485. Θεωρούμε τα σημεία του επιπέδου  $M(4\sigma\eta\phi, 5\eta\mu\phi)$ , με  $\phi \in [0, 2\pi)$ .

α) i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία αυτά ανήκουν σε έλλειψη, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραπάνω έλλειψης στο σημείο  $M(4\sigma\eta\phi, 5\eta\mu\phi)$ , με  $\phi \in (0, 2\pi)$ .

β) Έστω  $E(\phi)$ , με  $\phi \in (0, \pi/2)$ , είναι το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη της παραπάνω έλλειψης στο σημείο  $M(4\sigma\eta\phi, 5\eta\mu\phi)$  με τους άξονες  $x'$  και  $y'$ .

Να αποδείξετε ότι  $E(\phi) \geq 20$ . (θέμα εξετάσεων)

486. Δίνεται η έλλειψη  $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  με  $\alpha > \beta > 0$  και το σημείο  $K(0, 2\beta)$ . Μια μεταβλητή

ευθεία με συν. διεύθ.  $\lambda$  διέρχεται από το σταθερό σημείο  $K$  και τέμνει τις εφαπτόμενες της έλλειψης στα άκρα του μεγάλου άξονα της στα σημεία  $M$  και  $N$ .

α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο  $MN$  ως συνάρτηση του  $\lambda$ .

β) Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  ώστε ο κύκλος με διάμετρο  $MN$  να διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης.

487. Δίνεται η έλλειψη  $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

α) Η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο που η διχοτόμος του πρώτου

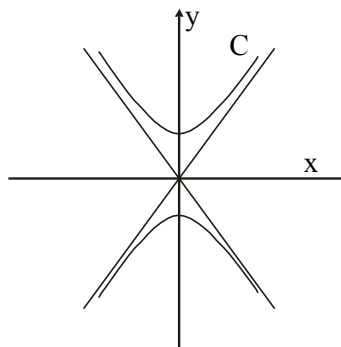
τεταρτημορίου τέμνει έχει κλίση  $-\frac{1}{2}$ . Να βρεθεί η εκκεντρότητα της έλλειψης.

β) Έστω  $A$  το σημείο του πρώτου τεταρτημορίου στο οποίο η ευθεία  $y = \lambda x$ ,  $\lambda > 0$  τέμνει την έλλειψη. Αν  $\mu$  είναι η κλίση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο  $A$ , τότε να εκφράσετε το γινόμενο  $\lambda\mu$  ως συνάρτηση των ημιαξόνων  $\alpha, \beta$ .

- 488.** Δύο σταθμοί ραντάρ βρίσκονται σε κατακόρυφο επίπεδο, που έχουμε «εφοδιάσει» με σύστημα συντεταγμένων Οχψ, στις θέσεις Α(-10,0) και Β(10,0). Ένα αεροπλάνο κινείται στο επίπεδο αυτό με σταθερή ταχύτητα  $v_0$  και με διεύθυνση την ΑΒ. Την χρονική στιγμή  $t=0$ , ένα σήμα από τον σταθμό Α ανακλάται στο αεροπλάνο και λαμβάνεται από τον Β σε χρόνο  $\frac{30}{c}$  sec (όπου  $c$  η ταχύτητα του σήματος).
- Σε χρόνο  $t = \frac{10}{v_0}$  sec ένα άλλο σήμα εκπέμπεται από το Α και ανακλώμενο στο αεροπλάνο φθάνει στο σταθμό Β σε χρόνο  $\frac{30}{c}$  sec. Να δείξετε ότι οι δύο θέσεις του αεροπλάνου στις οποίες δέχτηκε τα σήματα είναι σημεία έλλειψης της οποίας να βρείτε την εξίσωση και κατόπιν να βρείτε τη θέση (συντεταγμένες) στην οποία δέχτηκε το δεύτερο σήμα.

### Υπερβολή

- 489.** Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής που έχει τις εστίες της στον άξονα  $x'x$  συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων και ακόμα:
- έχει εστιακή απόσταση  $(E'E) = 6$  και εκκεντρότητα  $e = \frac{3}{2}$
  - έχει εστιακή απόσταση  $(E'E) = 20$  και εξισώσεις ασυμπτώτων  $y = \frac{4}{3}x$  και  $y = -\frac{4}{3}x$ .
  - έχει εστιακή απόσταση  $(E'E) = 4$  και ασύμπτωτες τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων.
- 490.** Ο κύκλος με εξίσωση  $x^2 + y^2 = 16$  διέρχεται από τις κορυφές της υπερβολής  $C$  του διπλανού σχήματος, της οποίας η μια ασύμπτωτη έχει εξίσωση  $y = -\frac{4}{3}x$ .
- Να βρεθούν:
- οι εστίες της υπερβολής
  - η εστιακή της απόσταση
  - η εξίσωσή της



- δ. να προσδιοριστεί το ορθογώνιο βάσης της υπερβολής  
 ε. η εκκεντρότητά της.
- 491.** Να βρείτε την εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ .
- 492.** Έστω η υπερβολή C:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Ναδειχθεί ότι κάθε παράλληλη προς μια ασύμπτωτη τέμνει την υπερβολή σ' ένα μόνο σημείο.
- 493.** Έστω M τυχαίο σημείο της υπερβολής  $y^2 - x^2 = a^2$ , (ε) η εφαπτομένη στο M και A, B τα σημεία που η (ε) τέμνει τις ασύμπτωτες. Τότε το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι σταθερό.
- 494.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες της υπερβολής  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$  και την ευθεία  $y = 2$ .
- 495.** Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή C:  $x^2 - y^2 = a^2$  και η ευθεία ε:  $y = k$ , που τέμνει την υπερβολή στα σημεία B και B'. Αν A και A' είναι οι κορυφές της υπερβολής, να δείξετε ότι  $\angle B'AB = \angle B'AB = 90^\circ$ .
- 496.** Αν  $e_1$  και  $e_2$  οι εκκεντρότητες δύο συζυγών υπερβολών (υπερβολές με τις ίδιες ασύμπτωτες και κάθετους άξονες), να αποδείξετε ότι  $e_1^2 + e_2^2 = e_1^2 \cdot e_2^2$ .
- 497.** Να βρείτε το γεωμ. τόπο των κέντρων των κύκλων, που διέρχονται από το σημείο A(2,0) και εφάπτονται εξωτερικά του κύκλου C:  $x^2 + y^2 + 4x = 0$ .
- 498.** Έστω η ισοσκελής υπερβολή C:  $x^2 - y^2 = a^2$  και A', A οι κορυφές της. Αν M είναι ένα σημείο της και M' το συμμετρικό του M ως προς τον άξονα  $\chi\chi$ , να αποδείξετε ότι τα σημεία A, M, A' και M' αποτελούν ορθοκεντρική τετράδα.
- 499.** Να αποδείξετε ότι η έλλειψη C<sub>1</sub>:  $x^2 + 4y^2 = 4$  και η υπερβολή C<sub>2</sub>:  $x^2 - 2y^2 = 2$ ,  
**α.** έχουν τις ίδιες εστίες και **β.** τέμνονται κάθετα (δηλ. στα κοινά σημεία του οι εφαπτόμενες τους είναι κάθετες).
- 500.** Δίνεται η υπερβολή C:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  και M (x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>) ένα σημείο της διαφορετικό από τις κορυφές της. Αν η κάθετη (ε') της (ε) εφαπτόμενης στο M τέμνει τους άξονες

$x'x, y'y$  στα  $\Gamma$  και  $\Delta$  αντίστοιχα

α. να βρεθεί συναρτήσει των  $x_1, y_1$  η εξίσωση της  $(\epsilon')$

β. να βρεθούν οι συντεταγμένες των  $\Gamma$  και  $\Delta$

γ. να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου  $N$  του  $\Gamma\Delta$

δ. να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος του  $N$  είναι μια υπερβολή  $C_1$

ε. να αποδειχθεί ότι οι υπερβολές  $C$  και  $C_1$  έχουν τις ίδιες εκκεντρότητες, αλλά τις εστίες σε διαφορετικούς άξονες.

**501.** Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της υπερβολής  $25x^2 - 4y^2 = 100$  που είναι παράλληλες προς την ευθεία  $3x - y = 0$ .

**502.** Δίνεται η υπερβολή  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  με κλάδους  $C_1$  και  $C_2$  και τυχαίο σημείο της  $M$

$(x_1, y_1)$  στον κλάδο  $C_1$  ( $y_1 \neq 0$ ).

α. Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτόμενης  $(\epsilon)$  στο σημείο  $M$  και να βρείτε τα σημεία τομής της  $(\epsilon)$  με τους άξονες.

β. Να δείξετε ότι η  $(\epsilon)$  τέμνει τον  $x'x$  σε σημείο μεταξύ των κορυφών της υπερβολής.

γ. Με δεδομένο ότι η  $(\epsilon)$  τέμνει τον κλάδο  $C_2$  στο  $M' (x_2, y_2)$ , να δείξετε ότι  $y_1 \cdot y_2 < 0$ .