Διανύσματα

1. Αν $A(\chi_1,\psi_1)$ και $B(\chi_2,\psi_2)$ δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου και (χ, ψ) οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ , να αποδείξετε ότι :

$\chi = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2}$ και $\psi = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}$ **(Θέμα 1Α2/2000 ΣΕΠ)**

2. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (x, y)$ του καρτεσιανού επιπέδου.

Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. **(Θέμα 1Α/2003 ΣΕΠ)**

3. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*
Αν $K(\chi_1,6)$ και $\Lambda(-9,\psi_2)$ δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου και $(-5,4)$ το μέσο του τμήματος ΚΛ, τότε

Α. $x_1= 1$ και $\psi_2 = -2$, Β. $x_1= 1$ και $\psi_2 = 2$,
Γ. $x_1=-3$ και $\psi_2 = 2$, Δ. $x_1= 4$ και $\psi_2 = 5$,
Ε.τίποτα από τα προηγούμενα **(Θέμα 1Β2/2000 ΣΕΠ)**

4. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Αν $\vec{\alpha}=(1,2)$ και $\vec{\beta}=(-3,1)$ διανύσματα του επιπέδου, τότε το διάνυσμα $2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$ έχει συντεταγμένες:

Α. $(-7,2)$ Β. $(7,7)$, Γ.$(3,7)$,
Δ. $(2,3)$ Ε.$(-7,7)$ **(Θέμα 1Β3/2000 ΣΕΠ)**

5. Αν $A(\chi_1,\psi_1)$ και $B(\chi_2,\psi_2)$ δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου, να γράψετε τις σχέσεις που δίνουν τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AB}$ και την απόσταση (ΑΒ) των σημείων Α και Β **(Θέμα 1Α3/2000 ΣΕΠ)**

6. Αν $\vec{\alpha}=(\chi_1,\psi_1)$ και $\vec{\beta}=(\chi_2,\psi_2)$ δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου να γράψετε τις συντεταγμένες των παρακάτω διανυσμάτων:

$\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}$, με λ και μ πραγματικούς. **(Θέμα 1Α1/2000 ΣΕΠ)**

7. *Στη **Στήλη Α** δίνονται οι συντεταγμένες δύο σημείων του καρτεσιανού επίπέδου και στη **Στήλη Β** οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AB}$ και η απόσταση των σημείων Α και Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. $A(1,3)$ και $B(-2,5)$	1. $\vec{AB}=(-3,2)$ και $(AB) = \sqrt{15}$
β. $A(2,-1)$ και $B(2,-3)$	2. $\vec{AB}=(-3,2)$ και $(AB) =2$
γ. $A(4,-3)$ και $B(6,-3)$	3. $\vec{AB}=(0,-2)$ και $(AB) =2$
	4. $\vec{AB}=(-3,2)$ και $(AB) = \sqrt{13}$

5. $\overrightarrow{AB}$=(2,0) και (AB) =2

(Θέμα 1Β1/2000 ΣΕΠ)

8. **Α.** Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.
Β. Να αποδείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους.

(Θέμα 1Α/2002)

9. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(5\kappa,\ 3-\lambda),\ \vec{\beta}=(4-\lambda,\ 4\kappa)$, όπου κ, $\lambda \in \mathbb{R}$
α)Για ποιες τιμές των κ και λ τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ίσα;
β) Αν λ =8, κ θετικός και τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα, τότε το κ είναι ίσο με:
Α. 4, Β. 1, Γ. 2, Δ. 3, Ε. 5

10. Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{v}$ είναι δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και η προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{\alpha}$ συμβολίζεται με $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{v}$, τότε να αποδείξετε ότι
$\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \pi\rho o\beta_{\alpha} \vec{v}$. **(Θέμα 1Α/2003)**

11. Έστω $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου Oxy.
α) Να εκφράσετε (χωρίς απόδειξη) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ συναρτήσει των συντεταγμένων τους.
β) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα ψ΄ψ και λ_1, λ_2 είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι:
$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$
γ) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά και θ είναι η γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2+y_2^2}}$ **(Θέμα 1 Α/1999)**

12. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}_1=(\lambda,\ \lambda-1)$ και $\vec{\beta}_1=(4,\ \lambda)$, με $\lambda \neq 0$. Για ποια από τις παρακάτω τιμές του λ τα διανύσματα $\vec{\alpha}_1$ και $\vec{\beta}_1$ είναι κάθετα;
Α. λ=1, Β. λ=3, Γ. λ=2,
Δ. λ=-2, Ε. λ=-3. **(Θέμα 1Βα/1999)**

13. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}=(1,\ -\sqrt{3})$, $\vec{v}=(2,\ 2\sqrt{3}\,)$ και $\vec{w}=(\sqrt{3},\ 1)$.

Να αντιστοιχίσετε κάθε γωνία που βρίσκεται στη στήλη Α΄ με το μέτρο της που βρίσκεται στη στήλη Β΄.

ΣΤΗΛΗ Α΄	**ΣΤΗΛΗ Β΄**
	Α. $\frac{\pi}{2}$
1. γωνία των $\vec{u}$ ***και*** $\vec{v}$	Β. $\frac{\pi}{6}$
2. γωνία των $\vec{u}$ ***και*** $\vec{w}$	Γ. $\frac{\pi}{4}$
3. γωνία των $\vec{v}$ ***και*** $\vec{w}$	Δ. $\frac{2\pi}{3}$
	Ε. $\frac{3\pi}{4}$
	Ζ. $\frac{\pi}{3}$

(Θέμα 1Ββ/1999)

14. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = (4, -2)$ και $\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7, 8)$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} = (-1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, -2)$.

β) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός k, ώστε τα διανύσματα $k\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

γ) Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (3, -1)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$. **(Θέμα 3/2000)**

15. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

Έστω τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$, $\vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε:

α. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β. τα μέτρα $|\vec{u}|, |\vec{v}|$ των διανυσμάτων $\vec{u}$ ***και*** $\vec{v}$

γ. το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$

δ. το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{u}$ ***και*** $\vec{v}$. **(Θέμα 2/2001)**

16. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1\ ,\ \lambda+2)$, $\vec{\beta} = (2\ ,\ 1)$ και $\vec{\gamma} = (0\ ,\ 7)$.

Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία είναι:

1) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ **2)** $\vec{\alpha}\ //\ \vec{\beta}$ **3)** $2\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\gamma}$

17. **Α.1.** Αν $\vec{\alpha}=(x_1,y_1)$ και $\vec{\beta}=(x_2,y_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία θ, να δείξετε ότι: συνθ= $\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$

Α.2. *Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Στήλη Α	Στήλη Β
α. κάθετα διανύσματα $\vec{\alpha}\neq\vec{0},\vec{\beta}\neq\vec{0}$	**1.** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\lvert\vec{\alpha}\rvert\cdot\lvert\vec{\beta}\rvert$
β. ομόρροπα διανύσματα $\vec{\alpha}\neq\vec{0},\vec{\beta}\neq\vec{0}$	**2.** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-\lvert\vec{\alpha}\rvert\cdot\lvert\vec{\beta}\rvert$
γ. αντίρροπα διανύσματα $\vec{\alpha}\neq\vec{0},\vec{\beta}\neq\vec{0}$	**3.** $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$
	4. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2\lvert\vec{\alpha}\rvert\cdot\lvert\vec{\beta}\rvert$

Β. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ =(λ,2) και $\vec{\beta}$ =(2,λ) όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

Β.1. Αν τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι κάθετα, τότε:

α. λ=1 **β.** λ=0 **γ.** λ=–2 **δ.** λ=2

Β.2. Αν τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα, τότε:

α. λ=1 **β.** λ=0 **γ.** λ=–2 **δ.** λ=2

Β.3. Αν τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα, τότε:

α. λ=–1 **β.** λ=0 **γ.** λ=–2 **δ.** λ=2

(Θέμα 1/2001 ΣΕΠ)

18. Αν $\vec{PA}+\vec{PB}-2\vec{P\Gamma}=\vec{0}$ και $\lvert\vec{PA}\rvert=6$, $\lvert\vec{PB}\rvert=\lvert\vec{P\Gamma}\rvert=2\sqrt{3}$ να δείξετε ότι:

α. τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά

β. το σημείο Γ είναι ανάμεσα στα σημεία Α, Β

γ. η γωνία $\widehat{APB}=90^o$

δ. το διάνυσμα $\vec{v}=\vec{PB}+\vec{P\Gamma}$ είναι κάθετο στο $\vec{A\Gamma}$. **(Θέμα 4ο /2001 ΙΟΥΛ)**

19. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(1,2)$ και $\vec{\beta}=(2,3)$

Α. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}=5\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$,

Β. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το $\vec{\gamma}$ με τον άξονα χ΄χ

Γ. Να βρείτε τον αριθμό $k\in\mathbb{R}$, ώστε το διάνυσμα $\vec{\upsilon}=(k^2\ -k,\ k)$ να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$. **(Θέμα 2/2004)**

Ευθεία

20. Να αποδείξετε ότι η ευθεία, με εξίσωση Αx+Βy+Γ=0, όπου Α≠0 ή Β≠0, είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$ και κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (A, B)$.

(Θέμα 1Α1/2001 ΙΟΥΛ)

21. Οι ευθείες ε_1,ε_2 έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1,λ_2 αντίστοιχα. Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισοδυναμίες:
α) $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow$ ....
β). $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow$ ....

(Θέμα 1Α2/2001 ΙΟΥΛ)

22. Δίνεται η ευθεία με εξίσωση ε: 2x+3y-8=0 και το διάνυσμα $\vec{\alpha}$=(2λ-1, λ), $\lambda \in R$
Να βρείτε το λ, όταν:
α) η ευθεία ε είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$
β) η ευθεία ε είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ **(Θέμα 1Β1/2001 ΙΟΥΛ)**

23. Στη Στήλη Α δίνονται οι εξισώσεις ευθειών και στη Στήλη Β τα κάθετα σ' αυτές διανύσματα.
Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της Στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της Στήλης Β που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. y=3x-5	1. (-2,7)
β. y=-7	2. (3,-1)
γ. x=1	3. (1,3)
	4. (4,0)
	5. (0,-3)

(Θέμα 1Β2/2001 ΙΟΥΛ)

24. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxy δίνονται τα σημεία Α(2,3) και Β(3,−2).
α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
β. Να βρείτε σημείο Μ του άξονα x΄x, ώστε τα σημεία Α, Μ, Β να είναι συνευθειακά. **(Θέμα 2/ΣΕΠ 2004)**

25. Δίνονται τα σημεία Α(14,5) και Β(2, −1).
α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας *ε* που διέρχεται από τα σημεία Α και Β είναι x − 2y − 4 = 0.
β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία *ε* τέμνει τους άξονες x΄x, y΄y στα σημεία Κ(4,0) και Λ(0,−2) αντιστοίχως. **(Θέμα 2/2003 ΣΕΠ)**

26. Δίνονται οι ευθείες ε_1: λx+2y+3=0 και ε_2: 3x-2y+1=0.
Να βρείτε το $\lambda \in IR$, όταν:
α) $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ β) $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$. **(Θέμα 1Β3/ΙΟΥΛ 2001)**

27. Δίνονται τα σημεία Α(8,0) και Β(0,4) του καρτεσιανού επιπέδου Οxy.
α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από την αρχή των αξόνων Ο και το μέσο Δ του τμήματος ΑΒ.
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο Δ και είναι

κάθετη στην ευθεία ΟΔ.

γ) Έστω Μ τυχαίο σημείο της παραπάνω ευθείας (ε). Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση:
$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{OM}^2$. **(Θέμα 3/1999)**

28. Ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, η πλευρά ΑΒ ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $3x-7y+27=0$ και η πλευρά ΑΔ στην ευθεία με εξίσωση $4x+y+5=0$. Οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ του παραλληλογράμμου τέμνονται στο σημείο $K(2, \frac{5}{2})$.

α. Να αποδείξετε ότι η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες (6,2).
β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει η πλευρά ΒΓ.
γ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει η διαγώνιος ΒΔ.
(Θέμα 2/2001 ΣΕΠ)

29. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy, η εξίσωση ευθείας $(\lambda - 1)x + (\lambda + 1)y - \lambda - 3 = 0$, όπου λ πραγματικός αριθμός, περιγράφει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ.
β) Τρία πλοία βρίσκονται στα σημεία Κ(2, 2), Λ(-1, 5) και Μ(1, 3). Να βρείτε τις εξισώσεις των φωτεινών ακτινών που διέρχονται από τα πλοία Κ, Λ και Μ.
γ) Να υπολογίσετε ποιο από τα πλοία Κ και Λ βρίσκεται πλησιέστερα στη φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το πλοίο Μ.
δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της θαλάσσιας περιοχής που ορίζεται από το φάρο Φ και τα πλοία Λ και Μ. **(Θέμα 4/2000)**

Κωνικές τομές

30. Στη **Στήλη Α** δίνονται εξισώσεις κωνικών τομών και στη **Στήλη Β** ονομασίες γραμμών του επιπέδου. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$, $\alpha > \beta > 0$	**1.** Κύκλος
β. $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$, $\alpha > 0, \beta > 0$	**2.** Ευθεία
γ. $y^2 = 2px$, $p > 0$	**3.** Υπερβολή
δ. $x^2 + y^2 = \varrho^2, \varrho > 0$	**4.** Παραβολή
	5. Έλλειψη

(Θέμα 1Γ/2003 ΣΕΠ)

31. *Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω προτάσεις ορθά συμπληρωμένες.*
α. Ο κύκλος με κέντρο $K(x_o, y_o)$ και ακτίνα ϱ έχει εξίσωση ....
β. Η έλλειψη με εξίσωση $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$, όπου $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$, έχει εστίες τα σημεία Ε και Ε΄ με συντεταγμένες .... και ....
γ. Η υπερβολή με εξίσωση $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$ έχει ως ασύμπτωτες τις ευθείες με εξισώσεις .... και ....
δ. Η παραβολή με εξίσωση $\psi^2 = 2\varrho\chi$ έχει διευθετούσα την ευθεία με εξίσωση ....

(Θέμα 1Γ/2002 ΣΕΠ)

32. Στη **Στήλη Α** δίνονται εξισώσεις κωνικών τομών και στη **Στήλη Β** εξισώσεις εφαπτόμενων κωνικών τομών στο σημείο επαφής (x_1, y_1).
Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της **Στήλης Α** *και δίπλα σε κάθε γράμμα, τον αριθμό της* **Στήλης Β** *που αντιστοιχεί πάντα στη σωστή εξίσωση εφαπτομένης.*

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. $x^2 + y^2 = \rho^2$	**1.** $yy_1 = p(x + x_1)$
β. $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$	**2.** $xx_1 + yy_1 = \rho^2$
γ. $y^2 = 2px$	**3.** $\dfrac{xx_1}{\alpha^2} + \dfrac{yy_1}{\beta^2} = 1$
δ. $\dfrac{x^2}{\alpha^2} - \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$	**4.** $xx_1 + yy_1 = 1$

	5. $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = \rho^2$
	6. $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$

(Θέμα 1Δ/2002)

33. Α. Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ.
Β .Πότε η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο; Ποιο είναι το κέντρο του και ποια η ακτίνα του;
Γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ε του κύκλου C: $x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$. **(Θέμα 1Α/2000)**

34. Δίνεται κύκλος $x^2 + y^2 = 10$ και το σημείο του $M(1,-3)$. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Μ έχει εξίσωση:
Α. $x + 3y = 10$, Β. $5x - y = 8$, Γ. $x - 3y = 10$,
Δ. $3x + 2y = 3$, Ε. $\frac{1}{2}x + y = 5$ **(Θέμα 1Β1/2000)**

35. Στη **Στήλη Α** δίνονται οι εξισώσεις που παριστάνουν κύκλους και στη **Στήλη Β** τα κέντρα των κύκλων και οι ακτίνες τους. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β** που αντιστοιχεί στη σωστή εξίσωση του κύκλου.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$	1. $K(0, -1)$, $\rho = 2$
β. $x^2 + (y + 1)^2 = 4$	2. $K(3, -2)$, $\rho = 1$
	3. $K(3, -2)$, $\rho = 4$

(Θέμα 1Β2/2000)

36. Να δείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $x^2+y^2 = \rho^2$.
(Θέμα 1Α/2002 ΣΕΠ)

37. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
α. Το σημείο $(1, -1)$ ανήκει στον κύκλο $x^2 + y^2 = 2$.

β. Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ και η ευθεία $y = 2x$ εφάπτονται.
γ. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda^2 = 0$, όπου λ πραγματικός αριθμός, είναι εξίσωση κύκλου.
(Θέμα 1Β3/2000)

38. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x\sigma\upsilon\nu\theta - 2y\eta\mu\theta - 1 = 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$.
Α. Να αποδείξετε ότι για κάθε θ η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο, του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.
Β. Αν $\theta = \frac{\pi}{2}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο $M(1,2)$.
Γ. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του θ τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$. **(Θέμα 4/2002**

39. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$ και το σημείο Μ(2,1).
α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(2, -1)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$.
β. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου που διέρχονται από το σημείο Μ(2,1). **(Θέμα 4/2003 ΣΕΠ)**

40. Θεωρούμε έναν πληθυσμό από 1999 μυρμήγκια. Κάθε μυρμήγκι χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό n=1,2,3,....,1999 και κινείται επάνω στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση: $(\chi-1)^2+\psi^2 = 2n(\chi+\psi-1)$.
Να δείξετε ότι:
α) η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του
β) κατά την κίνησή τους όλα τα μυρμήγκια διέρχονται από ένα σταθερό σημείο Α (που είναι η φωλιά τους). Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Α;
γ) οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας $\chi+\psi-1 =0$ στο σημείο Α. **(Θέμα 4/1999)**

41. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$. Να βρείτε:
Α. την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής
Β. τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
Γ. την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία $y= x - 1$. **(Θέμα 3/2002)**

Θεωρία αριθμών

42. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο ν ισχύει:

α. $3^{3ν}+51$=πολ 26

β. $3^{3ν}-1$=πολ 26 **(Θέμα 3/2001 ΣΕΠ)**

43. Δίνονται οι αριθμοί $α = k-1$ και $β = 5k+6$, όπου k ακέραιος αριθμός . Να αποδείξετε ότι:

α. Εάν ο α είναι άρτιος , τότε ο β είναι περιττός.

β. Ο αριθμός $3β-4α$ είναι πολλαπλάσιος του 11.

γ. Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών $5α+3$ και $β-9$ είναι ίσος με 1.

(Θέμα 2/2002 ΣΕΠ)

44. Έστω $α\in\mathbf{Z}$. Να αποδείξετε ότι:

Α. Ο αριθμός $α^3$ παίρνει την μορφή $α^3 = 8k$ όπου $k\in\mathbf{Z}$ ή $α^3 = 2k+1$ όπου $k\in\mathbf{Z}$.

Β. Ο αριθμός $α(α^2+1)$ είναι άρτιος. **(Θέμα 2/2003)**

45. Δίνονται οι ακέραιοι αριθμοί $β=3α+4$ και $γ=4α+5$,όπου α ακέραιος αριθμός. Να δείξετε ότι:

α) οι αριθμοί β, γ έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη τη μονάδα

β) ο αριθμός $βγ-(β+γ)$ είναι περιττός

γ) αν για τους $β=3α+4$ και $γ=4α+5$ ισχύει επιπλέον $α=3κ$, όπου κ ακέραιος, τότε ο αριθμός $γ^2 - β^2$ είναι πολλαπλάσιο του 3. **(Θέμα 2/2001 ΙΟΥΛ)**

46. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης των ακεραίων αριθμών α και β με το 5 είναι 2, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $α^2 + β^2 - 2003$ είναι πολλαπλάσιο του 5.

β. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού $8α+9β$ με το 5.

(Θέμα 3/2003 ΣΕΠ)

47. **Α.** Να αποδείξετε ότι το γινόμενο δύο περιττών ακεραίων αριθμών είναι περιττός ακέραιος αριθμός.

Β. Να αποδείξετε ότι αν ο α είναι ακέραιος, τότε και ο $\dfrac{α\left(α^2+1\right)}{2}$ είναι ακέραιος.

Γ. Αν ο α είναι περιττός ακέραιος, να αποδείξετε ότι ο $\dfrac{α\left(α^2+1\right)}{2}$ είναι επίσης περιττός ακέραιος. **(Θέμα 2/2002)**

48. Αν α είναι ένας ακέραιος αριθμός , να αποδείξετε ότι:

α. $(α+1)^2-1 = 4λ$, όπου κ ακέραιος

β. $\dfrac{α^2+(α+1)^2+(α+3)^2-2α+2}{4}=3μ$, όπου μ ακέραιος **(Θέμα 2/2000 ΣΕΠ)**

49. Έστω α, β, γ ακέραιοι αριθμοί. Να δείξετε ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

α. Αν $\alpha | \beta$, τότε $\alpha | \lambda\beta$ για κάθε ακέραιο λ.

β. Αν $\alpha | \beta$ και $\alpha | \gamma$, τότε $\alpha | (\beta+\gamma)$. **(Θέμα 1Α1/2001)**

50. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=2\kappa+2$ και $\beta= 6\kappa+7$, όπου κ ακέραιος αριθμός.

Να αποδείξετε ότι:

α) Οι αριθμοί 3α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους.

β) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού $(2\beta-\alpha)$ με το 10 είναι 2.

γ) Αν ο αριθμός κ είναι πολλαπλάσιο του 7, τότε και ο αριθμός $(\alpha+\beta-2)$ είναι πολλαπλάσιο του 7. **(Θέμα 2/1999)**

51. Θεωρούμε τους ακεραίους της μορφής $\alpha = 6k + \upsilon$ με $0 \le \upsilon < 6$ και k ακέραιος. Να δείξετε ότι:

α) οι παραπάνω ακέραιοι α που δεν είναι πολλαπλάσια του 2 ή του 3 παίρνουν τη μορφή $\alpha = 6k + 1$ ή τη μορφή $\alpha = 6k + 5$, όπου k ακέραιος

β) το τετράγωνο κάθε ακεραίου αριθμού της μορφής του ερωτήματος (α) μπορεί να πάρει τη μορφή: $\alpha^2 = 3\mu + 1$,όπου μ ακέραιος

γ) η διαφορά των τετραγώνων δύο ακεραίων του ερωτήματος (α) είναι πολλαπλάσιο του 3. **(Θέμα 2/2000)**

52. *Να γράψετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Έστω α, β φυσικοί αριθμοί και υ το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του α με τον $\beta \neq 0$. Τότε:

α. $(\alpha, \beta) < (\beta, \upsilon)$

β. $(\alpha, \beta) = (\beta, \upsilon)$

γ. $(\alpha, \beta) > (\beta, \upsilon)$

δ. $(\alpha, \beta) = (\beta, \upsilon) + 1$ όπου (α, β) είναι ο Μ.Κ.Δ. των φυσικών αριθμών α, β.

(Θέμα 1Α2/2001)

53. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Αν $7 | (\alpha+5)$ και $7 | (40-\beta)$ τότε:

α. $7 | (\alpha + \beta)$,

β. $7 | (\alpha+\beta+1)$,

γ. $7 | (\alpha+\beta+2)$,

δ. $7 | (\alpha+\beta-3)$. **(Θέμα 1Β1/2001)**

54. **α.** Να προσδιορίσετε τον Μ.Κ.Δ. των ακεραίων 72 και 112.
β. Να εκφράσετε τον Μ.Κ.Δ. των ακεραίων 72 και 112 ως γραμμικό συνδυασμό των ακεραίων 72 και 112. **(Θέμα 1Β2Β3/2001)**

55. Δίνεται ο ακέραιος αριθμός $α=12k-5$, όπου $k \in Z$

Α. Να αποδείξετε ότι ο α είναι περιττός αριθμός.

Β. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του α διά του 4.

Γ. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $Α= (α^2+15)(α^2-1)$ είναι πολλαπλάσιο του 64.

(Θέμα 3/2004)

Συνδυαστικά θέματα

56. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση*

α. Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ (δηλαδή τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους), τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$.

β. Έστω α, β μη μηδενικοί ακέραιοι. Αν $\alpha \mid \beta$ και $\beta \mid \alpha$ τότε ισχύει πάντα ότι α = β.

γ. Η ευθεία με εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0 είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}$ =(Β,–Α).

δ. Η εξίσωση της παραβολής με εστία $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ και διευθετούσα $\delta: x = -\frac{p}{2}$ είναι $x^2 = 2py$. **(Θέμα 1Β/2003 ΣΕΠ)**

57. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση*

α. Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ (δηλαδή τα $\vec{\alpha}$ $\vec{\beta}$ έχουν αντίθετη κατεύθυνση) τότε

$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

β. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2+y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $xy+x_1y_1 = \rho^2$.

γ. Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία Ε΄(–γ,0), Ε(γ,0) και σταθερό άθροισμα 2α είναι $\frac{\chi^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} = 1$ όπου $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$.

δ. Αν Ο είναι ένα σημείο αναφοράς τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχουμε

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$. **Θέμα 1Β/2003)**

58. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Ο συντελεστής διεύθυνσης λ μιας ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$,

με $x_1 \neq x_2$ είναι $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

β. Η απόσταση των σημείων $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ είναι ίση με

$(AB) = \sqrt{(x_2+x_1)^2+(y_2+y_1)^2}$.

γ. Η παραβολή με εξίσωση $x^2 = 2py$ έχει την εστία της πάνω στον άξονα x΄x.

δ. Αν α και β είναι φυσικοί αριθμοί με $\beta \neq 0$, τότε υπάρχουν μοναδικοί φυσικοί k και υ, τέτοιοι ώστε $\alpha = k\beta+\upsilon$, $0\leq\upsilon<\beta$. **(Θέμα 1Β/2002 ΣΕΠ)**

59. ***Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη*** *Σωστό* ***ή*** *Λάθος* ***δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.***

α. Ένα διάνυσμα και μία ευθεία, αν έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης είναι παράλληλα.

β. Αν $\det\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right)$ είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta} \Leftrightarrow \det\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = 1$.

γ. Αν α, β είναι θετικοί ακέραιοι, τότε πάντα ισχύει: $\alpha \cdot \beta \cdot [\alpha , \beta] = (\alpha , \beta)$ όπου $[\alpha , \beta]$ είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των α, β και (α, β) είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των α, β.

δ. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $A^2+B^2-4\Gamma >0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2} \;,\; -\frac{B}{2}\right)$. **(Θέμα 1Γ/2002)**

60. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό ή Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $A\neq0$ ή $B\neq0$, η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία.

β. Στην παραβολή $y^2=2px$, η εξίσωση της διευθετούσας είναι $x = \frac{p}{2}$

γ. Δίνονται οι ακέραιοι αριθμοί α, β, γ, k, λ με $\alpha \neq 0$.
Αν $\alpha | \beta$ και $\alpha \mid \gamma$, τότε $\alpha \mid (\kappa\beta +\lambda\gamma)$

δ. Αν Α, Β, Γ είναι κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ, τότε το εμβαδόν του είναι:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\left|\det(AB,A\Gamma)\right|$$

ε. Η εκκεντρότητα ε της έλλειψης είναι μεγαλύτερη της μονάδας.

(Θέμα 1Γ/ 2004)

61. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν Α , Β σημεία του επιπέδου και Μ το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, τότε για οποιοδήποτε σημείο Ο του επιπέδου ισχύει $\vec{OM} = \dfrac{\vec{OA}+\vec{OB}}{2}$.

β. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ. Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, τότε , $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1$,·για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

δ. Αν α και β είναι φυσικοί αριθμοί με $\beta \neq 0$, τότε υπάρχουν μοναδικοί φυσικοί k και υ τέτοιοι, ώστε $\alpha = k\beta + \upsilon$, $0 \leq \upsilon < \beta$.

(Θέμα 1Γ/ΣΕΠ 2004)

62. Δίνονται οι παράλληλες ευθείες ε_1: $3x+4y+6=0$ και ε_2: $3x+4y+16=0$.

Α. Να βρείτε την απόσταση των παράλληλων ευθειών ε_1 και ε_2.

Β. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας των ε_1 και ε_2.

Γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο τομής της ευθείας ε1 με τον άξονα χ΄χ και αποκόπτει από την ευθεία ε_2 χορδή μήκους $d = 4\sqrt{3}$.

(Θέμα 4ο/2004)

63. Το σημείο Α(7,5) είναι μία κορυφή τετραγώνου του οποίου η μία διαγώνιος βρίσκεται στην ευθεία $3x+y-6=0$.

α. Να βρείτε την εξίσωση της άλλης διαγωνίου του τετραγώνου.

β. Να δείξετε ότι το κέντρο του τετραγώνου είναι το σημείο Κ(1,3).

γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του παραπάνω τετραγώνου. **(Θέμα 3ο/ΣΕΠ 2004)**

64. Δίνεται ο κύκλος C: $x^2+y^2=25$ και ε_1, ε_2 οι εφαπτόμενες του κύκλου από το σημείο Μ(0,-10). Αν Α και Β είναι τα σημεία επαφής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με τον κύκλο, να βρείτε:

α) τις εξισώσεις των εφαπτόμενων $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

β) τις συντεταγμένες των σημείων επαφής Α και Β γ) την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και διέρχεται από τα σημεία Α και Β. **(Θέμα 3/2001 ΙΟΥΛ)**

65. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - y^2 + 6x + 9 = 0$.

α. Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει 2 ευθείες ε_1 και ε_2.

β. Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες.

γ. Να βρείτε ένα σημείο Μ(κ, λ) με κ>0 και λ>0 τέτοιο, ώστε το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (3, \kappa)$ να είναι παράλληλο προς τη μία από τις δύο ευθείες ε_1 και ε_2 και το διάνυσμα $\vec{\beta} = (-16, 4\lambda)$ να είναι παράλληλο προς την άλλη ευθεία.

δ. Να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων Ο, άξονα συμμετρίας τον άξονα x΄x και διέρχεται από το σημείο Μ.

(Θέμα 3/2001)

66. Δίνονται τα σημεία του επιπέδου Α(1, 1) και Β(5, 3).

α. Να αποδείξετε ότι ο συντ. διεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι ίσος με $\frac{1}{2}$.

β. Να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ είναι η ευθεία ε: $y = -2x+8$.

γ. Έστω Μ το μέσο του τμήματος ΑΒ και Γ, Δ τα σημεία τομής του άξονα x΄x με την ευθεία ΑΒ και την μεσοκάθετο ε αντίστοιχα. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία Μ , Γ και Δ. **(Θέμα 3/2002 ΣΕΠ)**

67. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2=9$.

α. Αν το σημείο $P(x_o, y_o)$ ανήκει στον παραπάνω κύκλο, να δείξετε ότι το σημείο $M(\frac{5}{3}\chi_o, \frac{4}{3}\psi_o)$ ανήκει σε έλλειψη της οποίας να υπολογίσετε την εκκεντρότητα.

β. Να βρείτε την εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής η οποία έχει τις ίδιες εστίες με την παραπάνω έλλειψη.

γ. Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της υπερβολής του ερωτήματος β καθώς και τη γωνία που σχηματίζουν οι ασύμπτωτες. **(Θέμα 4^o/ΣΕΠ 2004)**

68. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2-1)x+2\lambda y-\lambda^2-2\lambda-\gamma = 0$, όπου $\lambda\in IR$ και γ πραγματική σταθερά.

α. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ η εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή.

β. Εάν $\gamma = -1$, να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες που ορίζονται από την παραπάνω εξίσωση διέρχονται από το ίδιο σημείο.

γ. Εάν $\gamma \neq -1$, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων εκείνων που από το καθένα διέρχεται μόνο μία ευθεία η οποία επαληθεύει την παραπάνω εξίσωση.

(Θέμα 4/2002 ΣΕΠ)

69. Δίνεται ένα τρίγωνο με κορυφές $A(2\lambda-1, 3\lambda+2)$, $B(1,2)$ και $\Gamma(2,3)$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq -2$.

A. Να αποδείξετε ότι το σημείο Α κινείται σε ευθεία, καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\mathbb{R}$.

B. Εάν $\lambda=1$, να βρείτε:

α. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

β. την εξίσωση του κύκλου, που έχει κέντρο την κορυφή $A(1,5)$ και εφάπτεται στην ευθεία ΒΓ. **(Θέμα 3/2003)**

70. Η παραβολή με εξίσωση $y^2=\alpha x$ διέρχεται από το σημείο $A(2,4)$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο $E(2,0)$.

β. Έστω Ε΄ το συμμετρικό της εστίας Ε ως προς τον άξονα y΄y. Αν $M(x,y)$ είναι ένα οποιοδήποτε σημείο για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{ME}^2 = \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{E'E}$, να αποδείξετε ότι το σημείο $M(x,y)$ ανήκει στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και ακτίνα 2.

γ. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του παραπάνω κύκλου που διέρχονται από το σημείο Α. **(Θέμα 4/2001 ΣΕΠ)**

71. Δίνονται δύο κωνικές τομές: η παραβολή $y^2 = 2px$, και η έλλειψη $4x^2+2y^2=3p^2$, $p>0$.

A. Να αποδείξετε ότι οι εστίες Ε και Ε΄ της έλλειψης είναι τα σημεία $E\left(0, \frac{\sqrt{3}\,p}{2}\right)$ και $E'\left(0, -\frac{\sqrt{3}\,p}{2}\right)$.

B. Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής Κ και Λ των δύο κωνικών τομών είναι τα σημεία Κ $\left(\frac{p}{2}, p\right)$ και Λ $\left(\frac{p}{2}, -p\right)$.

Γ. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των δύο κωνικών τομών στο σημείο Κ $\left(\frac{p}{2}, p\right)$ είναι κάθετες. **(Θέμα 4/2003)**

72. **Α.** Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$, όπου μ, λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή των μ, λ, η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο.

Β. Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς μ, λ ισχύει η σχέση $3\mu + 2\lambda = 0$.

α. Να δείξετε ότι, όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$ για τις διάφορες τιμές των μ και λ, έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β. Να βρείτε τα μ, λ έτσι, ώστε, αν Α, Β είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία $x + y + 2 = 0$, να ισχύει $\overrightarrow{\mathbf{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{OB}} = \mathbf{0}$.

γ. Για τις τιμές των μ, λ που βρήκατε στο ερώτημα **β** να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΒ. **(Θέμα 4/2001)**