

39. Σε ένα σχολείο οι μαθητές διδάσκονται 1 ή 2 μαθήματα κατ' επιλογή, τα ME_1, ME_2, ME_3 και ME_4 . Επιλέγουμε ένα μαθητή τυχαία και τα ενδεχόμενα M_i : «Ο μαθητής έχει επιλέξει το μάθημα ME_i », $i = 1, 2, 3, 4$. Ποια ιδιότητα έχουν οι μαθητές των ενδεχομένων:
α. $M_1 \cap M_3$, β. $M_2 - M_3$ γ. $M_1 \cup M_4$ δ. $M_1 \cap M_3'$, ε. $M_2 \cup M_4'$.
40. Ρίχνουμε δύο ζάρια, ένα άσπρο και ένα κόκκινο, με την σειρά που αναφέρονται.
α. Να βρείτε το δειγματικό χώρο του πειράματος,
β. Να βρείτε τα ενδεχόμενα :
Α: « Η ένδειξη του κόκκινου ζαριού να είναι μεγαλύτερη από του άσπρου»
Β: «Το άθροισμα των ενδείξεων να είναι άρτιος αριθμός»
Γ: « Το γινόμενο των ενδείξεων να είναι αριθμός μικρότερος του 5»
γ. Να βρείτε τα ενδεχόμενα $A \cap B$, $A \cap \Gamma$, $B \cap \Gamma$, $A \cap B \cap \Gamma$ και να τα περιγράψετε λεκτικά.
41. Μεταξύ των οικογενειών με τρία παιδιά επιλέγουμε τυχαία μία οικογένεια και εξετάζουμε τα παιδιά της ως προς το φύλο και ως προς τη σειρά γέννησής τους.
Γ1. Να προσδιορίσετε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος χρησιμοποιώντας ένα δενδροδιάγραμμα.
Γ2. Να παρασταθούν με αναγραφή των στοιχείων τους τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα:
Α: «το πρώτο παιδί είναι κορίτσι»
Β: «ο αριθμός των κοριτσιών υπερβαίνει τον αριθμό των αγοριών»
Γ: «τα δύο πρώτα παιδιά είναι του ίδιου φύλου».
42. Δύο δοχεία Δ_1 και Δ_2 έχουν το πρώτο 1 μαύρη και 2 άσπρες μπάλες ενώ το δεύτερο 2 μαύρες και 1 άσπρη μπάλες. Διαλέγουμε ένα δοχείο και παίρνουμε από αυτό μια μπάλα.
α. Να γράψετε κατάλληλο δειγ. χώρο για το πείραμα.
β. Έστω Α : « εκλέγουμε το Δ_1 » και Β : « διαλέγουμε άσπρη μπάλα» να περιγράψετε λεκτικά τα παρακάτω ενδεχόμενα:
ι. $A \cap B$, ιι. A' ιiii. $A' \cap B$ ιiv. B' ιv. $A \cup B$.
43. Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ ενός πειράματος τύχης με $P(\omega_2) = \frac{1}{4}$, $P(\omega_3) = P(\omega_4) = \frac{1}{24}$ και $P(\omega_5) = 3P(\omega_1)$.
α. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
Η πιθανότητα $P(\omega_1)$ είναι:

$$A: \frac{1}{2} \quad B: \frac{1}{6} \quad \Gamma: \frac{1}{3} \quad \Delta: \frac{1}{12} \quad E: \frac{1}{8}$$

β. Δίνονται τα ενδεχόμενα $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ και $B = \{\omega_1, \omega_2\}$ του δειγματικού χώρου Ω .

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα τον αριθμό της **Στήλης Β** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $P(A \cup B)$	1. $\frac{1}{4}$
β. $P(A \cap B)$	2. $\frac{13}{24}$
γ. $P(A - B)$	3. $\frac{7}{24}$
δ. $P(A')$	4. $\frac{23}{24}$
	5. $\frac{1}{6}$

44. Έστω A, B και Γ ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Οι πιθανότητες των ενδεχομένων $A, A \cap B$ και $A \cup B$ ανήκουν στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης $(3x-1)(8x^2-6x+1)=0$.

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Γ ανήκει στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης $9x^2-3x-2=0$.

B1. Να αποδείξετε ότι $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ και $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

B2. Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A' - B')$, καθώς επίσης και την πιθανότητα του ενδεχομένου Δ : «πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα A και B ».

B3. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου

E: «πραγματοποιείται μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A και B ».

B4. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα B και Γ είναι ασυμβίβαστα.

45. Έστω $\Omega = \{1, 2, 3, 6\}$ δειγματικός χώρος.

A. Να δικαιολογήσετε ποιοι από τους παρακάτω τύπους μπορούν να θεωρηθούν κατάλληλοι και ποιοι όχι για να εκφράσουν την πιθανότητα κάθε στοιχειώδους ενδεχομένου k του Ω .

i) $P(k) = \frac{1}{k}$ ii) $P(k) = \frac{1}{2^k}$ iii) $P(k) = \frac{1}{2k}$

B. Οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X είναι οι ακόλουθες:

$$1, 1, 7, k, k, 3, 3, 3$$

όπου k είναι στοιχειώδες ενδεχόμενο του Ω , με πιθανότητα $P(k) = \frac{1}{2k}$.

Δίνονται τα ενδεχόμενα A, B του δειγματικού χώρου Ω , όπου $A = \{k \in \Omega : \text{η επικρατούσα τιμή των παρατηρήσεων της μεταβλητής } X \text{ είναι } M_0 = 3\}$ και $B = \{k \in \Omega : \text{η μέση τιμή } \bar{x} = 2,5\}$.

α. Να παρασταθούν με αναγραφή τα ενδεχόμενα A και B .

β. Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$ και $P(A \cup B)$.

46. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ για τον οποίο ισχύει $P(-1) = P(0) = P(1) = P(2) = 2P(3) = 2P(4) = 2P(5)$.
Ορίζουμε τα ενδεχόμενα του Ω : $A = \{1, 3, x^2 - x - 3\}$, $B = \{2, x + 1, 2x^2 + x - 2, -2x + 1\}$ όπου x ένας πραγματικός αριθμός.
α. Να βρεθούν οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω , δηλαδή οι $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$.
β. Να βρεθεί η μοναδική τιμή του x για την οποία ισχύει $A \cap B = \{-1, 3\}$
γ. Για $x = -1$ ναδειχθεί ότι: $P(A) = \frac{5}{11}$, $P(B) = \frac{7}{11}$, $P(A \cap B) = \frac{3}{11}$ και στη συνέχεια να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A - B)$ και $P(A \cup B)$.
47. Να δείξετε ότι για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A και B ενός πειράματος τύχης ισχύουν:
 $P(A \cap B) - P(A) \cdot P(B) = P(A' \cap B') - P(A')P(B') = P(A)P(B') - P(A \cap B')$.
48. Να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα που αναφέρονται στην **άσκηση 40** Γ3. Υποθέτουμε ότι ο δειγματικός χώρος Ω αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα.
α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:
 $\Delta = A \cap B$, $E = A \cup B$, $Z = \Gamma - E$
β) Να υπολογίσετε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:
Η: «δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A, B »
Θ: «πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα A, B ».
49. Από 120 μαθητές ενός Λυκείου, 24 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 20 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ένωσης Ελλήνων Φυσικών και 12 μαθητές συμμετέχουν και στους δύο διαγωνισμούς.
Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Ποια είναι η πιθανότητα ο μαθητής:
α. να συμμετέχει σ' έναν τουλάχιστον από τους δύο διαγωνισμούς;
β. να συμμετέχει μόνο σ' έναν από τους δύο διαγωνισμούς;
γ. να μη συμμετέχει σε κανέναν από τους δύο διαγωνισμούς;
50. Σε ένα σχολείο με 400 μαθητές διδάσκονται η αγγλική και η γαλλική γλώσσα. Κάθε μαθητής είναι υποχρεωμένος να παρακολουθεί τουλάχιστον μία από τις παραπάνω ξένες γλώσσες. Από τους παραπάνω μαθητές 340 παρακολουθούν την αγγλική γλώσσα και 240 τη γαλλική γλώσσα. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Έστω A το ενδεχόμενο να παρακολουθεί την αγγλική και Γ να παρακολουθεί τη γαλλική γλώσσα.
α. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και Γ είναι ασυμβίβαστα.
β. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να παρακολουθεί μόνο την αγγλική γλώσσα.

γ. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να παρακολουθεί μία μόνο ξένη γλώσσα από αυτές.

51. Ένα κουτί περιέχει άσπρες, κόκκινες και μαύρες σφαίρες. Παίρνουμε τυχαία μια σφαίρα. Η πιθανότητα να είναι μαύρη είναι $P(M) = \frac{1}{4}$, η πιθανότητα να είναι

άσπρη είναι $P(A) = 4\lambda^2$ και η πιθανότητα να είναι κόκκινη είναι $P(K) = -5\lambda + \frac{7}{4}$,

όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Αν για το πλήθος $N(\Omega)$ των σφαιρών που υπάρχουν στο κουτί ισχύει $64 < N(\Omega) < 72$, τότε

B1. Να δείξετε ότι $N(\Omega) = 68$

B2. Να υπολογιστεί η τιμή του λ

B3. Να βρείτε πόσες άσπρες, πόσες μαύρες και πόσες κόκκινες σφαίρες υπάρχουν στο κουτί

B4. Παίρνουμε τυχαία μία σφαίρα. Να βρεθεί η πιθανότητα αυτή να είναι άσπρη ή μαύρη.

52. Σε ένα κουτί υπάρχουν σφαίρες, άλλες κόκκινου και άλλες μπλε χρώματος. Κάθε σφαίρα φέρει έναν θετικό ακέραιο αριθμό. Το πλήθος των σφαιρών με άρτιο αριθμό είναι λ και το πλήθος των σφαιρών με περιττό αριθμό είναι $\lambda + 1$. Επιλέγουμε τυχαία μια σφαίρα από το κουτί και ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A: «η σφαίρα που επιλέγουμε έχει άρτιο αριθμό»

Π: «η σφαίρα που επιλέγουμε έχει περιττό αριθμό»

K: «η σφαίρα που επιλέγουμε έχει κόκκινο χρώμα»

M: «η σφαίρα που επιλέγουμε έχει μπλε χρώμα».

Δίνεται ότι:

• Η πιθανότητα του ενδεχομένου Π είναι $P(\Pi) = \frac{26}{51}$

• Η πιθανότητα του ενδεχομένου $M \cap A$ είναι $P(M \cap A) = \frac{6}{51}$

Γ1. α. Να αποδείξετε ότι στο κουτί υπάρχουν συνολικά 51 σφαίρες.

β. Να αποδείξετε ότι στο κουτί υπάρχουν 6 μπλε σφαίρες με άρτιο αριθμό.

Γ2. Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι $P(K) = \frac{7}{10} P(M)$, τότε

α. να αποδείξετε ότι στο κουτί περιέχονται 30 μπλε και 21 κόκκινες σφαίρες,

β. να βρείτε την πιθανότητα η σφαίρα που επιλέγουμε να είναι μπλε με περιττό αριθμό

γ. να βρείτε την πιθανότητα η σφαίρα που επιλέγουμε να είναι κόκκινη με περιττό αριθμό