

Ο ρυθμός μεταβολής

Ορισμοί

Έστω δύο μεγέθη p και q , των οποίων οι τιμές συνδέονται με την σχέση $p=p(q)$ όπου p παραγωγίσιμη ως προς q συνάρτηση.

Ρυθμό μεταβολής του p ως προς q , ονομάζουμε την παράγωγο $p' = \frac{dp}{dq}$.

Ρυθμό μεταβολής του p ως προς q , όταν $q=q_0$ ονομάζουμε την παράγωγο

$$p'(q_0) = \left. \frac{dp}{dq} \right|_{q=q_0}.$$

Συχνά αναφέρεται και ο όρος «**ρυθμός μεταβολής του μεγέθους p** » (χωρίς να αναφέρεται ως προς ποιο μέγεθος), τότε εννοείται ότι το μέγεθος p είναι συνάρτηση του χρόνου t ($t \geq 0$) και η σχέση εξάρτησης από το μέγεθος q , γίνεται $p(t)=p(q(t))$ ή γενικά μια σχέση της μορφής $f(p(t), q(t))=0$.

Οπότε έχουμε:

Ρυθμό μεταβολής του p , ονομάζουμε την $p'(t) = \frac{dp}{dt}$.

Ρυθμό μεταβολής του p την χρονική στιγμή t_0 , ονομάζουμε την $p(t_0) = \left. \frac{dp}{dt} \right|_{t=t_0}$.

Χαρακτηριστικοί ρυθμοί μεταβολής

Από την φυσική

Έστω υλικό σημείο (ΥΣ) που κινείται σε άξονα με συνάρτηση θέσης $x=x(t)$.

Η **ταχύτητα v** (στιγμιαία ταχύτητα) του ΥΣ είναι $v=x'=x'(t) = \frac{dx}{dt}$.

Η **επιτάχυνση a** του ΥΣ είναι $a=v'=x''=x''(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$.

Σημείωση.

Η ταχύτητα σαν παράγωγος της $x(t)$ μπορεί να έχει θετικό πρόσημο, οπότε το ΥΣ κινείται προς τα «θετικά» σημεία του άξονα (θετική φορά), αν έχει αρνητικό, κινείται προς τα αρνητικά (αρνητική φορά) και αν είναι 0 το ΥΣ είναι στάσιμο.

Επισημαίνουμε ακόμα ότι, η **ταχύτητα αυξάνεται (μειώνεται) ΟΧΙ** όταν η $v=x'(t)$ είναι γν. αύξουσα (γν. φθίνουσα) αλλά όταν το $|v|$ **αυξάνεται (μειώνεται)**.

Από την οικονομία

Έστω ότι κάποιο προϊόν παράγεται σε x ($x \geq 0$) μονάδες.

Θεωρούμε K , E και P τις (παραγωγίσιμες) συναρτήσεις, ως προς x , του **κόστους**

παραγωγής, των **εισπράξεων** και $P=E-K$ του **κέρδους** (από την πώληση), των x αυτών μονάδων, αντίστοιχα.

Την συνάρτηση $K'=K'(x)$ ονομάζουμε **οριακό κόστος** (ρυθμός μεταβολής του **κόστους**).

Την συνάρτηση $E'=E'(x)$ ονομάζουμε **οριακή είσπραξη** (ρυθμός μεταβολής της **είσπραξης**).

Την συνάρτηση $P'=P'(x)=E'(x)-K'(x)$ ονομάζουμε **οριακό κέρδος** (ρυθμός **μεταβολής του κέρδους**)

Η συνάρτηση $K_{\mu}(x)=\frac{K(x)}{x}$, $x>0$ λέγεται **μέσο κόστος**.

Μεθοδολογικές παρατηρήσεις

Όταν έχουμε να κάνουμε με προβλήματα ρυθμού μεταβολής προσέχουμε τα εξής:

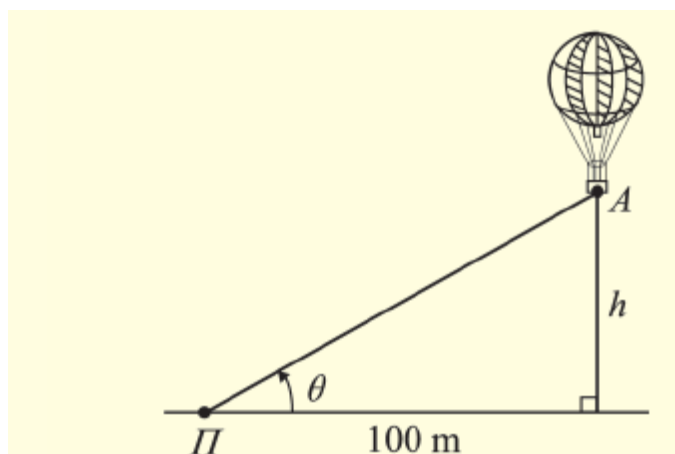
- α. Ποια μεγέθη εμπλέκονται
- β. Ποιον «ρυθμό μεταβολής» ζητάμε. Δηλ. του Μεγέθους 2 ως προς το μέγεθος 1 ή απλά του μεγέθους Y
- γ. Με ποια σχέση συνδέονται οι τιμές τους. Συχνά και ένα σχήμα θα δώσει ιδέες ειδικά σε προβλήματα που εμπλέκεται και η Γεωμετρία με την «φιλενάδα» της την τριγωνομετρία.
- δ. Τον ρυθμό μεταβολής σε συγκεκριμένες τιμές (ή στιγμιότυπα) ή γενικά.
- ε. Αφού θεμελιώσουμε την σχέση των μεγεθών (**προσέχοντας να ισχύουν οι σχέσεις για τις μονάδες των μεγεθών**) είτε μεταξύ τους είτε ως προς τον χρόνο. Υπολογίζουμε ό,τι χρειάζεται **παραγωγίζοντας**¹ είτε γενικά είτε σε συγκεκριμένη τιμή.
- στ. Δεν ξεχνάμε να προσθέτουμε τις μονάδες (μον. μεγέθους 1/μον. μεγέθους 2 ή μον. μεγ/ μονάδες χρόνου).

¹ Δεν είναι απαραίτητο να έχουμε σχέσεις ΜΟΝΟ της «κλασσικής μορφής» $y=f(x)$, $x \in D_f$. Επίσης θεωρούμε ότι ΟΛΕΣ οι εμπλεκόμενες συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες.

Παραδείγματα

1°.

Ένα αερόστατο Α αφήνει το έδαφος σε απόσταση 100 m από έναν παρατηρητή Π με ταχύτητα 50 m/min. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η γωνία θ που σχηματίζει η ΑΠ με το έδαφος την χρονική στιγμή κατά την οποία το μπαλόνι βρίσκεται σε ύψος 100 m.



Λύση

Έστω $\theta = \theta(t)$, $t \geq 0$, παραγωγίσιμη.

Από τα δεδομένα και το σχήμα έχουμε $h(t) = 100 \tan[\theta(t)]$. (I)

Έστω t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία έχουμε

$h(t_0) = 100$, οπότε

$$\tan(\theta(t_0)) = \frac{100}{100} = 1 \text{ και } h'(t_0) = 50 \text{ (επειδή ανυψώνεται).}$$

Παραγωγίζοντας την (I), στο t_0 , έχουμε

$$h'(t_0) = 100(1 + \tan^2[\theta(t_0)]) \cdot \theta'(t_0) \text{ δηλ. } 50 = 100(1 + 1)\theta'(t_0) \Rightarrow$$

$$\theta'(t_0) = 0,25 \text{ rad/min.}$$

Παρατηρήσεις

$$1. (\varepsilon\varphi\omega)' = 1 + \varepsilon\varphi^2\omega = \frac{1}{\sin^2\omega},$$

$$\omega \in \mathbb{R} - \{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}\} \text{ σε rad}$$

$$2. (\varepsilon\varphi x)' = (\varepsilon\varphi \frac{x\pi}{180})' =$$

$$\frac{\pi}{180} [1 + \varepsilon\varphi^2(\frac{x\pi}{180})] \text{ αν το } x$$

είναι σε μοίρες με

$$x \neq 180^\circ\kappa + 90^\circ, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

2°

Ένα κινητό κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$. Καθώς περνάει από το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, η τεταγμένη y ελαττώνεται με ρυθμό 3 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης x τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το A .

Λύση

Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $x = x(t)$ και $y = y(t)$, $t \geq 0$ των συντεταγμένων του τυχαίου σημείου του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$.

Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το κινητό περνά από το A , τότε είναι

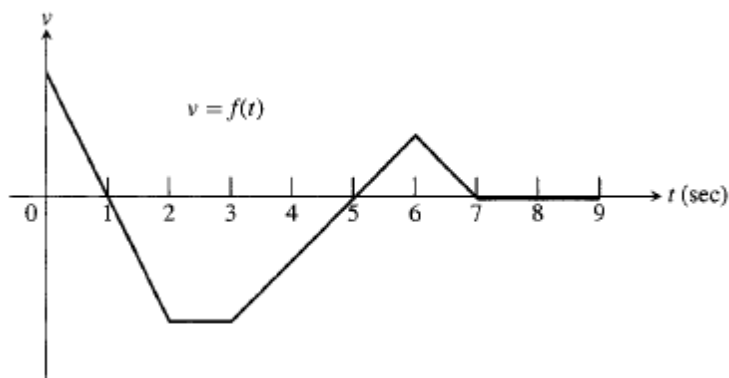
$$x(t_0) = \frac{1}{2}, \quad y(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y'(t_0) = -3 \text{ (επειδή ελαττώνεται).}$$

Έτσι από την σχέση $x^2(t)+y^2(t)=1$ $\xRightarrow[\text{στο } t_0]{\text{παραγωγίζοντας}}$ $2x(t_0)x'(t_0)+2y'(t_0)y(t_0)=0$ ή

$$2 \cdot \frac{1}{2} x'(t_0) + 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-3) = 0 \Rightarrow x'(t_0) = 3\sqrt{3} \text{ μονάδες ανά δευτερόλεπτο.}$$

3ο

Στο παρακάτω διάγραμμα δίνεται η γραφική παράσταση της ταχύτητας $v=f(t)$



, ενός ΥΣ που κινείται πάνω σε άξονα .

α. Πότε το ΥΣ κινείται ι. μπροστά, ιι. πίσω , ιιι. επιταχύνεται, ιν.

Επιβραδύνεται

β. Πότε η επιτάχυνση είναι ι. θετική, ιι. αρνητική, ιιι. μηδέν.

γ. Πότε το ΥΣ έχει την μέγιστη ταχύτητα;

δ. Πότε το ΥΣ ακινητεί για περισσότερο από μια στιγμή;

Λύση

Το ΥΣ, κινείται μπροστά (θετική φορά) αν και μόνο αν η ταχύτητα είναι θετική, προς τα πίσω όταν και μόνο όταν η ταχύτητα είναι αρνητική, επιταχύνεται όταν το $|v|$ αυξάνει, επιβραδύνεται όταν $|v|$ μειώνεται.

Από το διάγραμμα έχουμε τον πίνακα:

t	0	1	2	3	5	6	7	9
προσ. ν		+ 0 -	-	-	- 0 +	+ 0	0 0	
μον/νία ν				σταθ				σταθ
ν		ν	-ν	-ν	-ν	ν	ν	0
μον/νία ν				σταθ				σταθ

Από τον οποίον προκύπτουν:

α. ι. κινείται μπροστά στα διαστήματα $[0, 1]$, $[5, 6]$.

- ιι. κινείται προς τα πίσω στα διαστήματα $[1, 5]$
- ιιι. Επιταχύνεται στα διαστήματα $[1, 2]$ και $[5, 6]$.
- ιν. Επιβραδύνεται στα διαστήματα $[0, 1]$ $[3, 5]$ και $[6, 7]$.

β. Η επιτάχυνση είναι

- ι. θετική όταν η ταχύτητα v αυξάνεται², δηλ. στο $[3, 6]$
- ιι. αρνητική όταν η ταχύτητα v είναι φθίνουσα δηλ. στα $[0, 2]$ και $[6, 7]$
- ιιι. είναι 0 όταν η v = σταθερή δηλ. στα $[2, 3]$ και $[7, 9]$.

γ. Η μέγιστη ταχύτητα είναι όταν $|v|$ είναι μέγιστο. Αυτό συμβαίνει στην αρχή του φαινομένου και στο διάστημα $[2, 3]$.

δ. Ακίνηται όταν $v=0$. Αυτό συμβαίνει στιγμιαία στα $t_1=1, t_2=5$ και όταν $t \in [7, 9]$.

4ο

Έστω $K(x)=2000+100x-0,1x^2$, το κόστος παραγωγής x πλυντηρίων σε €, $x \geq 0$.

α. Να βρείτε το μέσο κόστος κατασκευής 100 πλυντηρίων

β. Να βρείτε το οριακό κόστος 100 πλυντηρίων.

γ. Να αποδειχθεί ότι το κόστος παραγωγής του 101^{ου} πλυντηρίου είναι περίπου ίσο με το οριακό κόστος παραγωγής των 100 προηγούμενων

Λύση

α. Το μέσο κόστος παραγωγής των 100 πλυντηρίων είναι $K_{\mu}(100) = \frac{K(100)}{100} =$

$$\frac{2000 + 100 \cdot 100 - 0,1 \cdot 100^2}{100} = \frac{100(20 + 100 - 0,1 \cdot 100)}{100} = 110\text{€}.$$

β. Το οριακό κόστος παραγωγής 100 πλυντηρίων είναι

$$K'(100) = 100 - 0,2 \cdot 100 = 80\text{€}.$$

γ. Το κόστος παραγωγής του 101^{ου} πλυντηρίου είναι

$$\begin{aligned} K(101) - K(100) &= 2000 + 100 \cdot 101 - 0,1 \cdot (101)^2 - 2000 - 100 \cdot 100 + 0,1 \cdot 100^2 = \\ &= 100 - 0,1(101^2 - 100^2) = 100 - 0,1 \cdot 201 = 79,9 \approx 80 = K'(100). \end{aligned}$$

² ΠΡΟΣΟΧΗ όχι το μέτρο αλλά οι τιμές της συνάρτησης.