

Να δείξετε ότι $(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + \psi^2) \geq (\alpha x + \beta \psi)^2$.

Αν $\alpha^2 + \beta^2 = 2$ και $\alpha x + \beta \psi = -2$ τότε $x^2 + \psi^2 \geq 2$

αν $x^2 + \psi^2 = 2$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 4$ τότε $x\psi + \alpha\beta \leq 3$

Αν $0 \leq x \leq 2$, να δειχθεί ότι:

$$0 \leq x^2 \leq 4, \quad \leq x^2 + 3x + 2 \leq 12$$

$$-4 \leq x^2 - 3x + 2 \leq 6 \quad -\frac{1}{4} \leq x^2 - 3x + 2 \leq 2$$

Αν είναι $2 < x < 8$ να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών βρίσκονται οι παραστάσεις

α. $2x - 3$ και β. $\frac{1}{x} + 2$.

Αν α αριθμός του διαστήματος (3, 5) και β αριθμός από το διάστημα (1, 5), να βρείτε

σε ποιο διάστημα βρίσκεται ο αριθμός $\frac{3\alpha + 3}{3\beta + 5}$.

Να απλοποιήσετε τις παρατάσεις και να γραφούν χωρίς τις απόλυτες τιμές για κάθε τιμή της μεταβλητής τους που ορίζονται :

$$A = |4 - x| + |2x - 10|, \quad B = \frac{|x + 1| - |x - 1|}{|x + 1| + |x - 1|}, \quad \Gamma = \frac{1 - x^2}{|x| + 1},$$

$$\Delta = \frac{|x - 1| - 2(x^2 - 2x + 1)}{|1 - x|}, \quad E = \frac{x - \frac{1}{x}}{|x| + 1}$$

Να αποδείξετε ότι :

$$x^2 - 10|x| + 25 \geq 0, \quad \frac{6|x|}{x^2 + 9} - 1 \leq 0.$$

$$\text{Δίνεται η παράσταση: } A = \frac{x - 4\sqrt{x} + 4}{x\sqrt{x} - 2x - 4\sqrt{x} + 8}.$$

Να βρείτε τις τιμές του για τις οποίες ορίζεται,

Να απλοποιηθεί.

$$\text{Αν } A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \text{ και } B = \frac{2(x+1)}{x-1},$$

Να βρείτε για ποιες τιμές ορίζονται

Να δείξετε ότι $A = B$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και $x \neq 1$

Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το τριώνυμο $(2\lambda-1)x^2 - 2\lambda x + 2\lambda - 1$, με $\lambda \neq \frac{1}{2}$ είναι

πάντα θετικό (για κάθε $x \in \mathbb{R}$).

Να δείξετε ότι για τους $\psi = x + \frac{1}{x}$, ισχύει $\psi \leq -2$ ή $\psi \geq 2$ για κάθε $x \neq 0$.

Για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $f(x) = (\mu-2)x^2 - 2(\mu+3)x + 2\mu - 18$, έχει ρίζες θετικές και αρνητικές.

Να λυθούν οι ανισώσεις:

α. $x(x^2 - 3x + 2)(2x^2 + 5x + 3)(x^2 + x + 1) < 0$

β. $(x+2)^2(2x^2 - 5x - 3)(3x^2 + 2x + 1) > 0$

γ. $(x^2 + 1)(x - 6) > 0$

δ. $x^3 - x^2 - 20x < 0$

ε. στ. $4x^3 - 20x^2 + 18x < 0$.

Να λυθούν οι ανισώσεις:

α. $\frac{3x-1}{x+2} > 2$ β. $\frac{x^2+3x-4}{x(x+3)} < 0$ γ. $\frac{4x}{3x-x^2} > \frac{1}{2}$

δ. $\frac{7x^2}{x^3+3x^2} > 0$ ε. $\frac{2x^2-4x+5}{x^2+2} > 1$ ζ. $\frac{x^2-4x+3}{x-2} > 0$

Να λυθεί η ανίσωση $|x^3 - 1| \leq x^2 + x + 1$

Να λυθούν οι ανισώσεις:

α. $\sqrt{3x+7} < \sqrt{x+3}$ β. $x - 1 \geq \sqrt{x+5}$ γ. $\sqrt{x^2 + x + 3} \geq x + \frac{1}{2}$.

Να μελετήσετε το πρόσημο της παράστασης

$$A = \frac{x}{3\sqrt{100^2 + x^2}} - \frac{1}{5} \quad \text{όταν}$$

α. $x \in \mathbb{R}$ και β. $x \in [0, 300]$.

Ένα φάρμακο είναι αποτελεσματικό αν η συγκέντρωσή του στο κυκλοφορικό σύστημα υπερβαίνει μία ορισμένη τιμή, που καλείται ελάχιστο θεραπευτικό επίπεδο. Υποθέτουμε ότι η συγκέντρωση σ ενός φαρμάκου, t ώρες ύστερα από τη λήψη του, δίνεται από τον τύπο mgt/lt . Αν για το συγκεκριμένο φάρμακο το ελάχιστο θεραπευτικό επίπεδο είναι $4 mgt/lt$, να βρείτε πότε η συγκέντρωσή του θα ξεπεράσει το επίπεδο σ .

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ και το σημείο $A(\frac{9}{2}, 0)$.

α. Να βρείτε το σημείο M της C_f που απέχει από το σημείο A τη μικρότερη απόσταση.

β. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο M είναι κάθετη στην AM .

Με συρματοπλέγμα μήκους 80m θέλουμε να περιφράξουμε οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου. Να βρείτε τις διαστάσεις του οικοπέδου που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

Να προσδιοριστούν δύο θετικοί αριθμοί με τις εξής ιδιότητες:

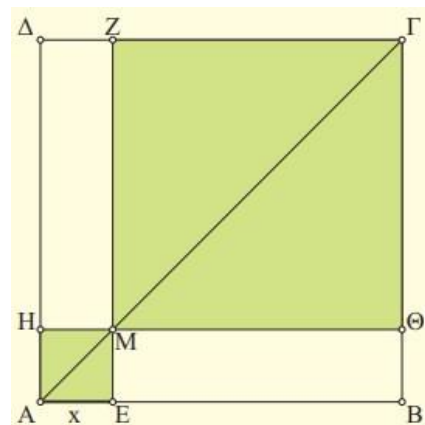
Το άθροισμά τους να είναι 10 και το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι ελάχιστο.

Να βρείτε το σημείο της ευθείας με εξίσωση $y = 2x - 3$ που είναι πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων.

Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο πλευράς $AB = 3$ και το M είναι ένα σημείο της διαγωνίου AG . Να βρείτε τις θέσεις του σημείου M πάνω στη διαγώνιο AG για τις οποίες

α. το άθροισμα των εμβαδών των σκιασμένων τετραγώνων είναι μικρότερο από 5

β. το ελάχιστο δυνατό.



Μία εταιρεία παράγει ηλεκτρικούς λαμπτήρες. Για ένα συγκεκριμένο τύπο λαμπτήρων το τμήμα έρευνας αγοράς της εταιρείας εκτιμά ότι αν η τιμή πώλησης των λαμπτήρων είναι x ευρώ ανά λαμπτήρα, τότε το εβδομαδιαίο κόστος K και τα αντίστοιχα έσοδα E (σε χιλιάδες ευρώ) δίνονται από τους τύπους $K = 7 - x$ και $E = 5x - x^2$.

Να βρείτε τις τιμές πώλησης των λαμπτήρων για τις οποίες

α. η εταιρεία έχει κέρδος.

β. η εταιρεία έχει το μέγιστο κέρδος.

Από τη φυσική γνωρίζουμε ότι στην κατακόρυφη βολή ενός σώματος με αρχική ταχύτητα v_0 το ύψος h του σώματος συναρτήσει του χρόνου t της κίνησης του δίνεται

από τον τύπο, $h(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

I. Αν $v_0 = 60 \text{ m/sec}$ και $g = 10 \text{ m/sec}^2$:

α. Να βρείτε πότε το σώμα θα φθάσει σε ύψος $h = 180$ μέτρα.

β. Να βρείτε πότε το σώμα θα βρεθεί σε ύψος $h = 100$ μέτρα.

Ποια είναι η ερμηνεία των προηγούμενων απαντήσεων;

II. Στη γενική περίπτωση όπου, με τα v_0 και g σταθερά, να βρείτε τη συνθήκη που πρέπει να ισχύει, ώστε το σώμα να φθάσει

α. στο μέγιστο ύψος

β. σε δεδομένο ύψος h_0

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο AOB είναι

ορθογώνιο, το M είναι τυχαίο σημείο της OA

και MN//OB. Αν OA = 4, OB = 3 και OM = x , και

$E(x)$ το εμβαδόν του MBN, να αποδείξετε ότι

$$MN = \frac{3(4-x)}{4} \text{ και } E(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x, x \in (0, 4) \text{ Να}$$

βρείτε τη θέση του M για την οποία το εμβαδόν

$E(x)$ μεγιστοποιείται. Ποια είναι η μέγιστη τιμή

του $E(x)$.

Για έναν τετραψήφιο αριθμό $\overline{xεδμ}$ ισχύουν:

- I. το άθροισμα των ψηφίων των εκατ/δων, των δεκάδων και των μονάδων είναι 14,
 - II. το άθροισμα των ψηφίων των χιλιάδων και των μονάδων είναι 9 και
 - III. το ψηφίο των εκατοντάδων είναι κατά 4 μεγαλύτερο από το ψηφίο των δεκάδων.
- Να βρείτε τον αριθμό για τον οποίο το άθροισμα $xe+zw$ είναι το μέγιστο δυνατό.

Μια βάρκα διανύει κατά το ρεύμα του ποταμού 10km και μετά 6km αντίθετα με αυτό. Αν το ρεύμα έχει ταχύτητα 1 km/h ποια μπορεί να είναι η ταχύτητα της βάρκας ώστε όλο το ταξίδι να διαρκεί τουλάχιστον 3h και το πολύ 4h;

Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης

$$y = \eta\mu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu x + 1, \text{ όταν } x \in [0, 2\pi]$$

Να αποδείξετε ότι για $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$.

Να βρείτε το διάστημα που ανήκουν οι τιμές του $y = \frac{x-3}{x+1}$, όταν $x \in [0, 2]$.

Να δείξετε ότι :

$$\alpha. y = \alpha\sigma\upsilon\nu x + \beta\eta\mu x + \gamma = \varrho\eta\mu(x+\varphi) + \gamma, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \alpha, \beta \neq 0, \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ και } \varrho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

$$\beta. 1 \leq 10\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu^2 x \leq 11 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$