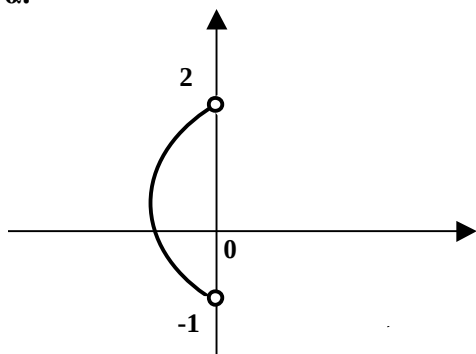


Α. Συνέχεια συνάρτησης

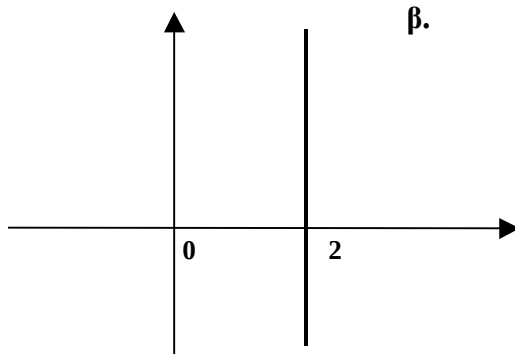
409. Σημειώστε με [Σ] τα γραφήματα των καμπυλών που έχουν προκύψει από συναρτήσεις της μορφής $y = f(x)$ και με [Σσ] εκείνων που είναι συνεχείς. Στις μη συνεχείς καταγράψτε τα σημεία ασυνέχειας. Αν υπάρχουν γραφήματα που είναι αδύνατον να προκύψουν από συναρτήσεις της μορφής $y = f(x)$, σημειώστε τα με [Ο].

(Τα x βρίσκονται στον οριζόντιο άξονα για όλα τα γραφήματα.)

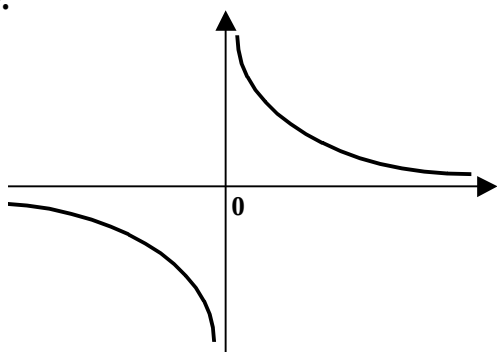
α.



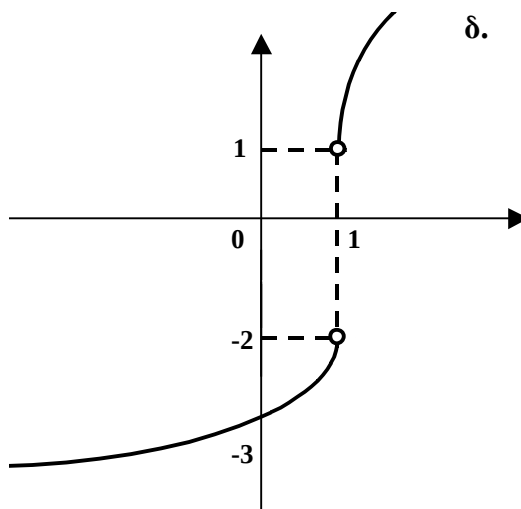
β.



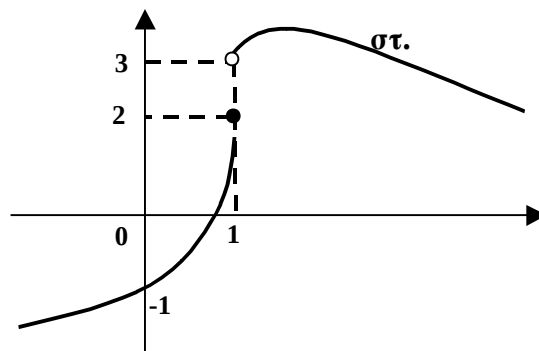
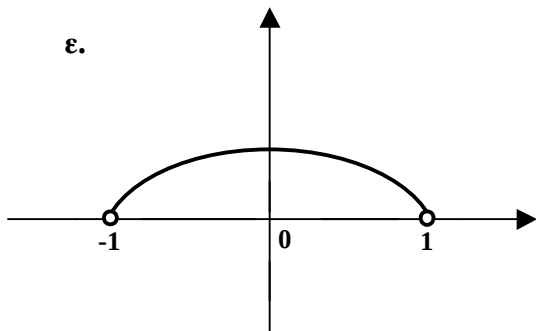
γ.



δ.



ε.



410. α. Να αποδείξετε ότι αν τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ είναι

πραγματικοί αριθμοί, τότε η f είναι συνεχής στο x_0 .

β. Να εξετάσετε τη συνέχεια της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{αν } x < 1 \\ (x-1)^2 & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$

στο σημείο $x_0 = 1$ εφαρμόζοντας το προηγούμενο συμπέρασμα.

411. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις:

$$\alpha. f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & x < 2 \\ 4 + 2x & x \geq 2 \end{cases}, \text{ στο } (0, 2) \text{ και στο } [0, 2] \quad \beta. f(x) = \frac{2x + 1}{3x - 6}$$

$$\gamma. f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 2x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}.$$

412. Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις:

$$\alpha. f(x) = \begin{cases} x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \beta. f(x) = \begin{cases} x \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\gamma. f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

413. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις επόμενες συναρτήσεις:

$$\alpha. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{1 - x}, & x \neq 1 \\ -2, & x = 1 \end{cases} \quad \beta. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5}, & x \neq 5 \\ 10, & x = 5 \end{cases}$$

$$\gamma. f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 5x - \eta\mu 3x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \quad \delta. f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 2x}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}.$$

414. Έστω συνάρτηση f και $x_0, x \in D_f$. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι είναι συνεχής.

415. Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $2f^3(x) + f(x) = \kappa x$, $\kappa > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι

α. είναι συνεχής

β. αν $\kappa=9$ τότε $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{9}{25}$ συναρτήσει τον κ και $f(2)$.

416. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 1 \\ 2 - \kappa x^2, & x > 1 \end{cases}$.

α. Να βρείτε το $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε η f να είναι συνεχής.

β. Να κάνετε πρόχειρη γραφική παράσταση της f .

417. Για την συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, ισχύουν $f(0) = 0$ και $\frac{f(x) - x}{f(x) + x} < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο 0.

418. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1, & x \leq 1 \\ \alpha x + \beta, & 1 < x \leq 2 \\ x - 5, & x > 2 \end{cases} \quad \text{να είναι συνεχής στα } x_1=1 \text{ και } x_2=2.$$

419. Έστω η συνάρτηση f τέτοια ώστε $|f(x) - \eta \mu x| \leq \sqrt{4 + x^2} - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$,

β. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

420. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο x_0 , ώστε $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 1$.

α. Να αποδείξετε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$.

β. Να αποδείξετε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = 0$.

γ. Να βρείτε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

421. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους:

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 3, & \text{αν } x < 1 \\ x^2, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{αν } x < 1 \\ \frac{1}{x}, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

α. Να αποδείξετε ότι οι f και g είναι συνεχείς στο σημείο $x_0 = 1$.

β. Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια στο $x_0 = 1$ τις συναρτήσεις:

$$f + g \quad f - g \quad f \cdot g \quad 3f \quad \frac{1}{g} \quad \frac{f}{g(f)} \quad \sqrt[3]{f}$$

422. Έστω η συνάρτηση g συνεχής στο 0 και ισχύουν $g(0) = 0$ και $|f(x)| \leq |g(x)|$, $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0 .

423. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και $|f(x)| \leq |x^2 - 5x + 6|$ για κάθε

$x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$ και στο σημείο

$x_0 = 3$.

424. Για την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να

δείξετε ότι :

α. η f είναι συνεχής και

β. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} = 0$.

425. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$|3xf(x)| \leq |2x - \eta\mu 2x| \quad \text{βρείτε το } f(0).$$

426. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+1}$ και $g(x) = \begin{cases} 2x+1 & x \geq -1 \\ 4x-5 & x < -1 \end{cases}$.

Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις f , g , $g \circ f$ στο $x_0 = -1$.

427. Αν για τη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α. Να βρείτε το $f(0)$

β. Αν η f είναι συνεχής στο 0 , να δείξετε ότι είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

428. Αν για τη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση:

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

α. Να βρείτε το $f(1)$

β. Αν η f είναι συνεχής στο 1 , να δείξετε ότι είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

429. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) + 2 - x}{x} = 3.$$

Να δείξετε ότι $f(1) = -2$.

430. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f(x+\psi) = f(x) + f(\psi) - 2x\psi (x+\psi) - 3 \text{ για κάθε } x, \psi \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \eta\mu 3x}{\sqrt{x^2 + 4} - 2} = 2010. \text{ Να δειχθεί ότι:}$$

α. η f συνεχής στο 0,

β. η f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

431. Αν $|f(x)| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

432. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους:

$$f(x) = \sqrt{x-1} \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{4-x}$$

α. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.

β. Να αποδείξετε ότι οι f και g είναι συνεχείς στο σημείο $x_0 = 2$.

γ. Να εξετάσετε αν οι $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι και αυτές συνεχείς στο $x_0 = 2$.

433. Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι συνεχής:

α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0 - h)) = 0$.

β. Να εξετάσετε αν ισχύει το αντίστροφο χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

434. Για την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν ότι :

$$\text{είναι συνεχής στο } x_0=0 \text{ και για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad 1 - \sqrt{x^2 + 1} \leq xf(x) \leq x^2.$$

Να αποδείξετε ότι η γραφική της παρ/ περνά από την αρχή των αξόνων.

435. Ένα κατάστημα νοικιάζει βιντεοκασέτες με τιμή 1,75 € για τις 4 πρώτες ημέρες.

Αν ο χρόνος είναι μεγαλύτερος από 4 ημέρες, τότε ο πελάτης πληρώνει πρόστιμο 0,60 € και 0,25 € επιπλέον για την καθεμιά ημέρα που καθυστερεί να επιστρέψει την κασέτα. Αν το κόστος ενοικίασης της μιας κασέτας παρασταθεί με $f(x)$, όπου x είναι οι ημέρες ενοικίασης:

α. να εκφράσετε το κόστος ενοικίασης σαν συνάρτηση των ημερών ενοικίασης.

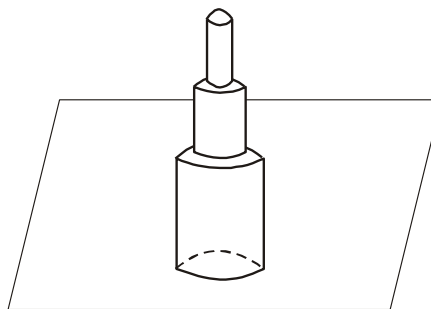
β. να εξετάσετε αν η παραπάνω συνάρτηση είναι συνεχής.

436. Τρεις κύλινδροι είναι τοποθετημένοι ο ένας πάνω στον άλλον σε ένα οριζόντιο επίπεδο p . Οι ακτίνες των βάσεων των κυλίνδρων είναι 3 m, 2 m και 1 m και το

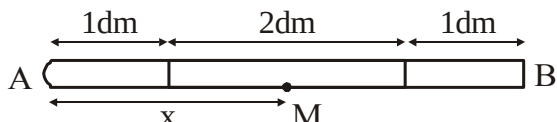
ύψος του καθενός είναι 5 m.

α. Να εκφράσετε το εμβαδόν της οριζόντιας τομής του στερεού που σχηματίζεται ως συνάρτηση της απόστασης της τομής από το επίπεδο p .

β. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και να εξετάσετε αν η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής.



437. Μια ράβδος AB αποτελείται από τρία ομοιογενή τμήματα με μήκη 1 dm, 2 dm, 1 dm και βάρη 2 kg, 3 kg, 1 kg α-



ντιστοιχώς. Να εκφράσετε το βάρος ενός τμήματος AM της ράβδου ως συνάρτηση του μήκους του x . Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση αυτή.

438. Το σταθερό εβδομαδιαίο κόστος κάποιου προϊόντος είναι 27 €. Επιπλέον από αυτό, για παραγωγή μέχρι 20 τόνων, το κόστος είναι 1,2 € ανά τόνο. Μετά τους 20 τόνους, κάθε επιπλέον τόνο στοιχίζει 2,4€. Αν το $f(x)$ συμβολίζει το συνολικό εβδομαδιαίο κόστος των x τόνων την εβδομάδα, τότε:

α. να βρείτε τον τύπο της $f(x)$

β. να κάνετε τη γραφική παράσταση της $f(x)$ για $0 \leq x \leq 40$ (κάθε μονάδα στον άξονα x' να είναι 5 τόνοι και κάθε μονάδα στον y' να είναι 15€.)

γ. να εξετάσετε την $f(x)$ ως προς τη συνέχεια στο $x = 20$.

439. Ο πληθυσμός μιας καλλιέργειας βακτηριδίων αναπτύσσεται σύμφωνα με τον τύ-

πο: $P(t) = 6 \left(\frac{t^2 + 5}{19t + 25} \right)^{\frac{1}{2}}$ χιλιάδες βακτηρίδια όπου t ο χρόνος σε ημέρες (από τη

στιγμή της δημιουργίας της).

Πέντε ημέρες μετά εισάγεται στο περιβάλλον της καλλιέργειας ένα φάρμακο που έχει ως αποτέλεσμα η ανάπτυξη του πληθυσμού να γίνεται πλέον σύμφωνα με

τον τύπο: $P(t) = 6 \left(\frac{t + 5}{t^2 + 12t + 45} \right)^{\frac{1}{2}}$ χιλιάδες βακτηρίδια

όπου t ο χρόνος σε ημέρες αμέσως μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

α. Να βρείτε μια συνάρτηση που να δίνει τον πληθυσμό της καλλιέργειας τις 10 πρώτες ημέρες από τη δημιουργία της.

β. Να βρείτε τον πληθυσμό σε κλάσματα του δευτερολέπτου πριν τη χορήγηση

του φαρμάκου.

γ. Να βρείτε τον πληθυσμό της κλάσματος του δευτερολέπτου μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

δ. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση του (α) ερωτήματος είναι συνεχής (στο πεδίο ορισμού της).

Συνέπειες συνέχειας

440. Να δείξετε ότι:

α. η εξίσωση $(x + 1) 2^{x+1} = 1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 0)$

β. η εξίσωση $x^3 - 6x^2 + 3 = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-1, 1)$.

441. Δείξτε ότι η εξίσωση $\eta\mu x - x + 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

442. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\lambda \ln x + e^x = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

443. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^{v+1} - 2x + 1$, $v \in \mathbb{N}$.

α. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ διαιρείται με το $x - 1$.

β. Να βρείτε το πηλίκο της παραπάνω διαίρεσης.

γ. Αν $Q(x)$ το παραπάνω πηλίκο, να αποδείξετε ότι το $Q(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

δ. Να δικαιολογήσετε ότι και το $P(x)$ έχει την ίδια ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

444. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[0, 8]$ για την οποία ισχύουν ότι $f(0) = 1$, $f(2) = -2$, $f(4) = 2$, $f(6) = -4$ και $f(8) = 1$.

α. Να βρείτε πόσες φορές τουλάχιστον, η γραφική παράσταση της f θα τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $(0, 8)$.

β. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[0, 2]$ και $[4, 6]$ και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[2, 4]$ και $[6, 8]$, τότε να βρείτε πόσες ρίζες θα έχει η εξίσωση $f(x) = 0$.

445. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x$ και

$g(x) = \sin 2x$ τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο του διαστήματος $(0, \frac{\pi}{4})$.

446. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο $[0, \alpha]$ με $f(0) = f(\alpha)$.

α. Να αποδείξετε ότι η $h(x) = f(x) - f(\frac{\alpha}{2} + x)$ είναι συνεχής στο $(0, \frac{\alpha}{2})$.

- β.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f\left(\frac{\alpha}{2} + x\right)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \frac{\alpha}{2})$.
- 447.** Αν η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ και $5f(1) + 7f(2) = 0$, δείξτε ότι η $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[1,2]$.
- 448.** Αν οι f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύουν: $f(\alpha) < g(\alpha)$ και $f(\beta) < g(\beta)$ τότε να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.
- 449.** Η ανάβαση στην ψηλότερη κορυφή του Ολύμπου (Μύτικας, 2.917 μ.) γίνεται συνήθως από τη θέση “Πριόνια” και διαρκεί για ένα μέσο ορειβάτη 6 ώρες. Η κατάβαση διαρκεί επίσης 6 ώρες. Ένας ορειβάτης ξεκινάει από τα “Πριόνια” στις 6 το πρωί και χωρίς να σταματήσει βρίσκεται σε 6 ώρες στην κορυφή, όπου και διανυκτερεύει. Την άλλη μέρα ξεκινάει στις 6 το πρωί την κατάβαση από τον “Μύτικα” και σε 6 ώρες, ακολουθώντας την ίδια διαδρομή, βρίσκεται στα “Πριόνια”. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της διαδρομής στο οποίο βρίσκεται την ίδια ώρα και τις δύο ημέρες.
- 450.** Δείξτε ότι η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα στο $(1,2)$.
- 451.** Θεωρούμε την εξίσωση: $\frac{\kappa^2}{x} + \frac{\lambda^2}{x+1} + \frac{\mu^2}{x-1} = 0$, $\kappa, \lambda, \mu \neq 0$
- α.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$.
- β.** Αν οι δύο ρίζες είναι οι ρ_1, ρ_2 , να δείξετε ότι: $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\kappa^2}$.
- 452.** Για συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $x \neq y$.
- α.** Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής,
- β.** Η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ είναι γν. φθίνουσα,
- γ.** αν $f(1) = f(2) = \frac{3}{2}$, τότε η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μια ακριβώς ρίζα.
- 453.** Έστω η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν το σύνολο τιμών της f είναι το $[\alpha, \beta]$, τότε
- α.** να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = x_0$$

β. να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το συμπέρασμα αυτό.

454. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η f έχει μία μόνο ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα (με τη σειρά που δίνονται): $[0, 1]$, $[\frac{1}{2}, 1]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$.

β. Να παραστήσετε τα διαστήματα στην ευθεία των πραγματικών αριθμών. Να περιγράψετε, με βάση το (β), μια διαδικασία (αλγόριθμο) μέσω της οποίας μπορούμε να προσεγγίσουμε μια ρίζα ενός πολυωνύμου.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $x^3 + x - 1 = 0$. Να βρείτε τη ρίζα με προσέγγιση δεκάκις χιλιοστού (με υπέρβαση). Να κάνετε χρήση υπολογιστή τσέπης.

455. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$.

α. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών στα διαστήματα $[1, \frac{3}{2}]$, $[\frac{3}{2}, 2]$.

β. Με τη βοήθεια του πρώτου ερωτήματος να δικαιολογήσετε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ βρίσκεται στο διάστημα $(1, \frac{3}{2})$, ενώ ο $\sqrt{3}$ στο διάστημα $(\frac{3}{2}, 2)$.

456. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[a, b]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[a, b]$.

Να αποδείξετε ότι

α. υπάρχει $\xi \in [a, b]$ και

β. υπάρχει $\xi \in (a, b)$ αν είναι γνησίως μονότονη

$$\text{τέτοιο ώστε: } f(\xi) = \frac{f(a) + f(b) + f(\frac{a+b}{2})}{3}$$

457. Έστω f συνεχής στο $[0, 2]$ με ελάχιστη τιμή το -1 και μέγιστη το 1 . Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^4(x) + 5f(x) = 3$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 2)$.

458. Αν f είναι μια συνάρτηση, τότε λέγοντας χορδή της f εννοούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα ανήκουν στη γραφική παράσταση της f . Έστω ότι f είναι μια συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $[0, 1]$ και με $f(0) = f(1) = 0$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει οριζόντια χορδή της f με μήκος $\frac{1}{2}$.

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει οριζόντια χορδή της f με μήκος $\frac{1}{v}$, όπου $v = 1, 2, 3, 4, \dots$

459. Ο αριθμός των βακτηριδίων σε μια καλλιέργεια t ώρες μετά την έναρξη ενός πειράματος δίνεται, κατά προσέγγιση σε χιλιάδες από τη συνάρτηση:

$$f(t) = \begin{cases} e^{\frac{t}{2}+1}, & 0 \leq t \leq 4 \\ -\frac{1}{5}e^3 t + \frac{9}{5}e^3, & t > 4 \end{cases}$$

(σημειώνεται ότι 4 ώρες μετά την έναρξη του πειράματος εισήχθη μια τοξική ουσία μέσα στην καλλιέργεια).

α. Να βρείτε τον αριθμό των βακτηριδίων κατά την έναρξη του πειράματος (θεωρήστε $e \approx 2,718$).

β. Να εξετάσετε αν μπορούμε να εκτιμήσουμε τον αριθμό των βακτηριδίων κατά τη χρονική στιγμή $t_0 = 4$.

γ. Πότε ο πληθυσμός των βακτηριδίων θα εξαφανιστεί;

δ. Να αποδείξετε ότι σε δύο χρονικές στιγμές του πειράματος ο αριθμός των βακτηριδίων θα είναι 18.950.

460. Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων:

i. $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$

ii. $f(x) = \ln^2 x - \ln x$.

461. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2) = 1$, $f(1) = f(4) = 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (1, 4)$. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(1+f(3))x^3 - 2x + 3] = -\infty$.

462. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και τέτοια ώστε $(x^2 - x)f(x) < 0$.

α. Να μελετήσετε το πρόσημο των τιμών $f(x)$ στα $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$.

β. Να δείξετε ότι $f(0) = f(1) = 0$.

463. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 10]$ και η εξίσωση

$f(x) = 0$ έχει μοναδικές ρίζες το 3 και το 7.

α. Αν υπάρχει x_0 ώστε $f(x_0) > 0$ με $x_0 < 3$, να δείξετε ότι η $f(x) > 0$ για κάθε $x < 3$.

β. Αν υπάρχει x_0 ώστε $f(x_0) < 0$ με x_0 τέτοιο ώστε $3 < x_0 < 7$, να δείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε x : $3 < x < 7$.

464. Να βρεθούν οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f με την ιδιότητα $f^2(t) = 2tf(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.
465. Για την συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν $[f(x)]^2 - 2xf(x) = 9$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 3$.
Να δείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$ $x \in \mathbb{R}$
466. Να βρεθούν (όλες) οι συνεχείς συναρτήσεις $y = f(x)$ που ικανοποιούν την σχέση $4x^2 - y^2 = 4$ για κάθε x σε κατάλληλα επιλεγμένο διάστημα.
Τι παριστάνουν γραφικά οι συναρτήσεις αυτές;
Ποια συνάρτηση από αυτές περνά από το $A(5,4)$;
- 466α Έστω συνεχής συνάρτηση $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $4(x-1)^2 - f^2(x) = 4$ για κάθε $x \in D_f$ με $f(-2019) > 0 > f(2020)$.
α. Να βρείτε την συνάρτηση και
β. τις ασύμπτωτες της C_f .
467. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \neq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) > 0$.
Να αποδείξετε ότι:
α. $f(x) > x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, β. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
468. Να βρείτε τα πεδία τιμών των συναρτήσεων:
i. $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $x \in [0,4]$ ii. $f(x) = x^3 + 2x + 1$, $x \in (0,2]$.
469. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $x < f(x) < x+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
470. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2} - \sqrt{6-x}$.
α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
β. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.
γ. Να εξετάσετε την f ως προς τη συνέχεια.
δ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
ε. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό x_0 έτσι ώστε $f(x_0) = \frac{3}{2}$.

471. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ με $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \gamma \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \delta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας α-

ριθμός $x_0 > 0$ τέτοιος ώστε να ισχύει: $f(x_0) + e^{x_0+1} + \ln x_0 = 1$.

472. Έστω η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f(x) = x^5 + x + 1$, $x \in [-1, 0]$.

α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(-1, 0)$.

473. Να βρείτε μια συνάρτηση f τέτοια ώστε

$$f(-1) = -1, f(1) = 1,$$

f συνεχής στο $(-1, 1)$,

αλλά να μην υπάρχει αριθμός γ μεταξύ του -1 και του 1 με $f(\gamma) = 0$.

474. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ), κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις.

I. Αν οι συναρτήσεις f, g ορίζονται κοντά στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0}$

$$[f(x)g(x)], \text{ τότε είναι } \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

II. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in D_f$, τότε και η συνάρτηση $\sqrt[n]{f}$, $n \in \mathbb{N}^*$ είναι συνεχής.

III. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα Δ , τότε ορίζεται η αντίστροφή της συνάρτηση, η οποία έχει πεδίο ορισμού το $f(\Delta)$.

IV. Αν για την συνάρτηση f ισχύει ότι $f(f(x)) = 1 + x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση είναι « $1 - 1$ ».

V. Αν $|f(x) - \eta \mu x| \leq x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

VI. Είναι: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{1-x} = +\infty$

475. Δίδεται μια συνάρτηση f , γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ), κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α. Τα σημεία $A(-1, 2)$ και $B(2, 1)$ ανήκουν και τα δυο στη γρ. παράσταση της f .

β. Η εξίσωση $f(x^2+4) = f(4x)$, έχει μοναδική λύση στο $\mathbb{R}$.

476. Δίδεται μια συνάρτηση f , γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Έστω ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(1, \pi)$ και $B(4, -e)$.

Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ), κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(I) Η ανίσωση $x^2 < f^{-1}(\pi) - 1$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

(II) Υπάρχει $\xi \in (1,4)$ τέτοιος ώστε $f(\xi)=e$.

477. Δίδονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - ax, \quad g(x) = \frac{ax + \eta\mu(\beta x)}{x} \quad \text{και} \quad h(x) = \begin{cases} 2\gamma x + \beta + \delta, & x \leq 2 \\ \gamma x + 3\beta, & x > 2 \end{cases} \quad \text{για τις}$$

$$\text{οποίες είναι: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 5.$$

α. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

β. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} [2h(x) - 3\varphi(x)] = 1$, όπου φ είναι μια συνεχής συνάρτηση, να βρείτε τον αριθμό $\varphi(2)$.

478. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{αν } x \leq 1 \\ 3x - 1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια.

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1 - 1.

γ. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f^{-1} .

δ. Να εξετάσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων f και f^{-1} .

479. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$.

i. να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

ii. να λύσετε την ανίσωση: $e^{x^2-x} - e^{x+3} < 2x - x^2 + 3$.

iii. να λύσετε την εξίσωση: $e^x = 1 - x$ (1)

iv. για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^a + a - 1)x^3 - x + 1}{(a - 1)x^2 + 2x + 1}$.

v. αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} + kx + \lambda \right) = \varrho$, όπου ϱ η λύση της εξίσωσης (1), να βρείτε τους

πραγματικούς k, λ .

480. Δίδονται οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha < \beta$ και η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε:

► $f(\alpha) = 2\beta,$

► $f(\beta) = 2\alpha$ και

► $|f(x)| < 2004$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x = f(\beta)\eta\mu x + f(\alpha)$ έχει μια τουλάχιστον λύση

στο διάστημα $(0, \alpha + \beta]$.

B. Αν η f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα $\Delta = [\alpha, \beta]$, τότε:

i. Να βρείτε την εικόνα $f(\Delta)$ του διαστήματος Δ .

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε

$$f(\xi) = \alpha + \beta.$$

iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - 2x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

iv. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της f τέμνει την ευθεία $y = 2x$ σ' ένα

ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

Γ. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xf(x) + 4x}{x^2 + 1}$.

Δ. Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) - h(x) = 2004x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ακόμη ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο λύσεις ετερόσημες ρ_1, ρ_2 . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (ρ_1, ρ_2) .

481. Αν για συνάρτηση f ισχύει $xf(x) - x^4 + \eta\mu(ax) = x^2 \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, και

$$f(0) = -\alpha \neq 0.$$

α. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

β. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $\mathbb{R}$.

482. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{2 \cdot e^x}$

α. δείξτε ότι η f αντιστρέφεται και να βρεθεί η συνάρτηση f^{-1}

β. να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{f^{-1}(x)}$.

483. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{x}} + 2}{e^{\frac{1}{x}} + 1}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$.

α. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

β. Να κάνετε πρόχειρη γραφική παράσταση της f .

γ. Υπάρχει τιμή του a για την οποία η f να είναι συνεχής;

484. Έστω η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} = 3 \text{ και } 2\ln(1-x) \leq (x-1)f(x) \leq 1-x^2 \text{ για κάθε } x \in (0,1).$$

α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x) = f(x) - \ln x - 3$, $x \in (0, 1)$.

β. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x) = e^{f(x)-3}$ τέμνει τη διχοτόμο των θετικών ημιαξόνων σε ένα μόνο σημείο, με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

485. Η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=0$ και πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $\psi=2x-1$. Να βρείτε τα όρια:

$$\text{ι. } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{ιι. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{ιιι. } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] \quad \text{ιιιι. } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

486. Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $|xf(x) - \ln x| \leq \sqrt{x^2 + 1} - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

487. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, είναι συναρτήσεις συνεχείς στο $\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε να ισχύει $f(x) - g(x) = x - 4$, για $x \in \mathbb{R}$. Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $y = 3x - 7$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , καθώς $x \rightarrow +\infty$.

α. Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} \text{ και } \text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + 3x + \ln 2x}{x f(x) - 3x^2 + 1}$$

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 3$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g , καθώς $x \rightarrow +\infty$.

488. Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 + x^2 + e^{xh}}$, όπου $h > 0$

$$\text{ι. Να δείξετε ότι: } g(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 + 1}, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$$

ιι. Να εξετάσετε αν η g είναι συνεχής.

489. Δίνεται η συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$f(f(x)) + 2f(x) = 4 - x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 2.$$

α. να δείξετε ότι είναι 1-1.

β. να βρείτε το $f(2)$

γ. αν επιπλέον η f είναι συνεχής τότε:

i. να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$,

ii. να βρείτε το $f(1)$,

iii. να λύσετε την εξίσωση $f(f^{-1}(-x^2 + 2x) - 1) = 2$,

δ. αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = l \in (-\infty, 0)$ τότε:

i. να βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$,

ii. να βρείτε $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{f^2(x) + f(x) + 2} + f(x)]$,

iii. να βρείτε το l .

490. Δίνεται συνάρτηση $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως μονότονη.

Η C_f τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0,5)$ και $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x^2 - 4x)f(x) + \eta\mu(x-4)}{\sqrt{x-3} - 1} = 18$.

α. να βρείτε την τιμή $f(4)$.

β. να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f και το σύνολο τιμών της ,

γ. να δείξετε ότι η ευθεία $y = 4$ τέμνει την C_f σε ένα ακριβώς σημείο,

δ. να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (0, 4)$ τέτοιο ώστε

$$6f(x_0) = f(1) + 2f(2) + 3f(3).$$

491. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x + e^x & x \leq 0 \\ e^{-x} - \ln(x+1) & x > 0 \end{cases}$.

α. Να δείξετε ότι η f δεν είναι 1-1.

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ. Να δείξετε ότι έχει 2 ακριβώς ρίζες ετερόσημες.

δ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1} + \frac{f(\beta)-1}{\beta-2} = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο

$(0,1)$ για κάθε $\alpha, \beta > 0$.

ε. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \varrho$ για τις διάφορες τιμές του $\varrho \in \mathbb{R}$.

492. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 = 1$, περιττή και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+1}{(x-1)^2} = 3$.

α. Να βρεθεί η $f(1)$,

β. να δείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_0 = -1$,

γ. να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-3}{x^2+2x+1}$.

493. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x + \kappa$, με $\kappa \in \mathbb{R}$ σταθερός, τέτοια ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

α. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 1$,

β. Να βρείτε την τιμή του λ ,

γ. Να δείξετε ότι στο διάστημα $(0, 1)$, η $f(x) = 0$ έχει μία μοναδική ρίζα,

δ. να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x) \ln x}$.

494. Ο αριθμός των βακτηριδίων σε μια καλλιέργεια t ώρες μετά την έναρξη ενός πειράματος δίνεται, κατά προσέγγιση σε χιλιάδες από τη συνάρτηση:

$$f(t) = \begin{cases} e^{\frac{t}{2}+1}, & 0 \leq t \leq 4 \\ -\frac{1}{5} e^3 \cdot t + \frac{9}{5} e^3, & t > 4 \end{cases}$$

(σημειώνεται ότι 4 ώρες μετά την έναρξη του πειράματος εισήχθη μια τοξική ουσία μέσα στην καλλιέργεια).

α. Να βρείτε τον αριθμό των βακτηριδίων κατά την έναρξη του πειράματος (θεωρήστε $e \approx 2,718$).

β. Να εξετάσετε αν μπορούμε να εκτιμήσουμε τον αριθμό των βακτηριδίων κατά τη χρονική στιγμή $t_0 = 4$.

γ. Πότε ο πληθυσμός των βακτηριδίων θα εξαφανιστεί;

δ. Να αποδείξετε ότι σε δύο χρονικές στιγμές του πειράματος ο αριθμός των βακτηριδίων θα είναι 18.950.