

Παράγωγος σε σημείο - παράγωγος συνάρτησης.

495. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, για την οποία ισχύει $2 - x^4 \leq f(x) \leq 2 + x^4$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α. $f(0) = 2$

β. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.

γ. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

496. Να εξετάσετε αν υπάρχει η παράγωγος στο $x_0 = 0$ της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}, & x \neq 0, \pm 1 \\ 0, & x = 0, \pm 1 \end{cases}.$$

497. Να βρεθεί το $a \in \mathbf{R}$ ώστε η f να έχει παράγωγο στο $x_0 = 1$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{αν } x \leq 1 \\ \frac{x^2 + ax - 1}{x + 1} & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

498. Να προσδιορίσετε τις τιμές των α, β ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \alpha \sin x, & x \leq \frac{\pi}{3} \\ \beta + \eta \mu \frac{x}{2}, & x > \frac{\pi}{3} \end{cases} \text{ να είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 = \frac{\pi}{3}.$$

499. Αν f με $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ να εξετάσετε αν υπάρχουν και να βρεθούν οι παράγωγοι στο $x_1 = 0$ και $x_2 = 2$.

500. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$ με

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + \beta, & \text{αν } x \leq 2 \\ \sqrt{x^2 + 5}, & \text{αν } x > 2 \end{cases}.$$

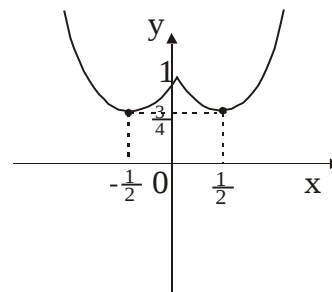
501. Προσδιορίστε τις τιμές των παραμέτρων $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$ έτσι ώστε η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in (-\infty, 5] \\ \kappa x + \lambda, & x \in (5, +\infty) \end{cases} \text{ να έχει παράγωγο στη θέση } x_0 = 5.$$

502. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο 1, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και ισχύει $f(x) = |x - 1| \cdot g(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η τιμή $g(1)$.

503. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x - 3| + x + 2$. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη
α. στο σημείο $x_0 = 3$ και β. στο σημείο $x_0 = 4$.

504. Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης
 $f(x) = x^2 - |x| + 1$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

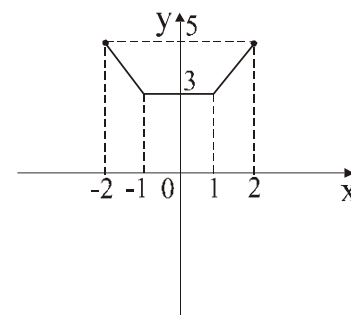


505. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

α. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στα σημεία

με τετμημένες -1 , 1 , $\frac{3}{2}$.

β. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f' .



506. Έστω ότι σε μια χώρα 80.000 κάτοικοι έχουν τη δυνατότητα να αγοράσουν αυτοκίνητα αξίας 10 εκατομμυρίων € και πάνω. Αν σε x μήνες από τώρα ο αριθμός των κατοίκων, οι οποίοι έχουν τη δυνατότητα να αγοράσουν τέτοιου είδους

αυτοκίνητο, είναι σε χιλιάδες $f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{x}^3 - 4x + 80$, να βρείτε:

α. τον αριθμό αυτό των αγοραστών σε 16 μήνες από τώρα

β. σε πόσους μήνες από τώρα ο αριθμός αυτός θα είναι πάλι 80.000

γ. το $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{f(x) - f(16)}{x - 16}$.

507. Έστω οι συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f'(x_0) = g'(x_0)$ και $f(x_0) = g(x_0)$. Αν ισχύει $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ για $x \in (\alpha, \beta)$, να αποδείξετε ότι και η h είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και μάλιστα ισχύει $h'(x_0) = f'(x_0)$.

508. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = |x| g(x)$ όπου g συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ να αποδείξετε ότι $g(0) = 0$.

- 509.** Αν $f(1) = 4$ και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f'(1) = 5$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f(x) - 12}{x - 1}$.
- 510.** Αν $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x - 3} = -7$ και f συνεχής στο $x_0 = 3$, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 3$ και να βρείτε την $f'(3)$.
- 511.** Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) + 2 - x}{x} = 3$.
Να δείξετε ότι **α.** $f(1) = -2$ **β.** $f'(1) = 4$.
- 512.** Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη κοντά στο $x_0 = -2$ και παραγωγίσιμη και η συνάρτηση g συνεχής στο $x_0 = 2$ και επιπλέον :
 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) + x}{x + 2} = 2$ (1) και $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{g(x) + 3}{x + 2}$ (2), να βρείτε :
α. τις τιμές $f(-2)$, $g(-2)$, $f'(-2)$
β. το όριο της $F(x) = \frac{3f(x) + 2(x-1)}{g(x) + 1 - x}$ στο $x_0 = -2$.
- 513.** Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$ με $f'(2) = 3$ και $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(2-h) - f^2(2)}{h} = 6$.
Α. **α.** Να δείξετε ότι $f(2) = -1$.
β. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x) + \sqrt{4x-3}}{x^2 - 1} = 4$.
Β. Αν για συνάρτηση g ισχύουν :
i. $f(x) \leq x^2 + g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
ii. $f(2) - g(2) = 4$ και
iii. είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$, να βρείτε τις $g(2)$ και $g'(2)$.
- 514.** Αν $x^2 + x + 3 \leq f(x) \leq x^3 + x + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:
α. $f(0) = 3$ και $x^2 + x \leq f(x) - f(0) \leq x(x^2 + 1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

515. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0=1$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 5$. Να δείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1) = 5$.
516. α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = \sin(2|x| + \pi), x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.
β. Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του a για τις οποίες η συνάρτηση f με $f(x) = \sin(2|x| + a)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.
517. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0=2$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2+3x)}{x} = 3$.
Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$ και να βρείτε την $f'(2)$.
518. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0=1$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + x^3}{x-1} = 3$. Να δείξετε ότι είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.
519. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 = 0$. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{\eta\mu 2x} = 1010$, να βρείτε:
α. την $f(0)$ και β. την παράγωγο στο $x_0=0$.
520. Αν η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x^2$ είναι γνησίως φθίνουσα, να δείξετε ότι $f'(x_0) \leq 2x_0$.
521. Έστω f συνάρτηση τέτοια ώστε $f(x) - f(x-1) = 2x-1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συνεχής στο $x_0=0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sqrt[3]{x+1}}{x} = -\frac{1}{3}$.
Α. Να δείξετε ότι:
α. η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$
β. η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και
Β. να υπολογίσετε τις $f'(0)$ και $f'(2)$.
522. Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ υποθέτουμε ότι $f(x+y) = f(x)f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι
α. $f(0)=1$
β. Αν η f παραγωγίζεται στο 0 και $f'(0) = 1$ τότε είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και είναι $f'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

523. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(x\psi) = f(x) + f(\psi)$ για κάθε $x, \psi \in \mathbb{R}$ και

$$1-x \leq f(x) \leq \frac{1-x}{x} \text{ για κάθε } x > 0. \text{ Να αποδείξετε ότι:}$$

α. η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και

β. η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x > 0$.

Κανόνες παραγώγισης

524. Να λύσετε τις ανισώσεις $f'(x) < g'(x)$, όταν:

α. $f(x) = x + \ln(x-2)$ και $g(x) = x + 5\ln(x-1)$,

β. $f(x) = e^{2x} - 3$ και $g(x) = 5(e^x - x + 3)$.

525. Αν f, g συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και για τις οποίες ισχύει $\frac{1}{f(x)} + g(x) = e^x$,

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και $f'(1) = g'(1) = 1$, να δείξετε ότι $f^2(1)(e-1) + 1 = 0$.

526. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα για κάθε $x, \psi \in \mathbb{R}$

527. $f(x+\psi) = 3x^2\psi + 3x\psi^2 + \psi^3 + f(x)$.

Να αποδείξετε ότι η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι είναι $f'(x) = 3x^2$.

528. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x + \sqrt{x^2 + 1})^2$.

Να δείξετε ότι ισχύει $(1+x^2)f''(x) + xf'(x) = 4f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

529. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 e^x$. Αν $\alpha f(x) + \beta f'(x) + \gamma f''(x) = 12xe^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

530. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και για κάθε $x, \psi \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x+\psi) = f(x)f(\psi).$$

α. Να δείξετε ότι $[f(x)]^n = nf(x)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $x \in \mathbb{R}$.

β. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $f'(nx) = [f(x)]^{n-1} f'(x)$.

531. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(xe^x) = e^x - x$.
Υπολογίστε τον αριθμό $f'(e)$.

532. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{ax}$ όπου $a \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο τιμές της παραμέτρου a έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση

$$f''(x) + 2f'(x) = 3f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

(Θέμα εξετάσεων)

533. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f ώστε $f''(x) - 2f'(x) + 4f(x) = 0$. Να δείξετε ότι $f'''(x) + 8f(x) = 0$.

534. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu^2(ax)$, $x \in \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε την τιμή του a ώστε να ισχύει $f''(x) + 4a^2 f(x) = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Θέμα εξετάσεων)

535. Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \eta\mu \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

ι. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

ιι. Να βρείτε την παράγωγο της f για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

536. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ αν για τη συνάρτηση f με $f(x) = (x^2 - 2x + \lambda)e^x$ ισχύει η σχέση $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

537. Αν οι συναρτήσεις f και g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο 0 και $f'(0) = -1$, $g'(0) = 6$, να βρείτε την δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης $h(x) = xf(x) + xg(x)$ στο $x_0 = 0$.

538. Δίνονται οι a, b, c ανά δύο διαφορετικοί μεταξύ τους και η συνάρτηση f με

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c). \text{ Να δειχτεί ότι } \frac{1}{f'(a)} + \frac{1}{f'(b)} + \frac{1}{f'(c)} = 0.$$

539. Αν $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$, $x > 1$, να δείξετε ότι :

$$\alpha. \frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad \beta. (x^2 - 1) \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + x \frac{df(x)}{dx} = f(x).$$

540. Να βρείτε την συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν $\varphi(x) = x - e^{2x} - 1 + \varphi'(x)$, (1), $4\varphi(x) = 4x + \varphi''(x)$, (2) για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

541. Μια συνάρτηση είναι περιττή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

α. η γραφική της παράσταση διέρχεται από το $(0, 0)$.

β. $f''(0) = 0$.

542. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με $f(0) = 2$, $f'(0) = 3$ και

$$\alpha. g(x) = x^2 f(x) + x, \quad \beta. g(x) = f(x) - \frac{x^2}{f(x)}.$$

Να δείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και να βρείτε την παράγωγο σε της σε κάθε περίπτωση.

543. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ συνάρτηση, για την οποία ισχύει :

$f(x+\psi) = f(x) \sin \psi + f(\psi) \sin x$ για κάθε $x, \psi \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

α. $f(0) = 0$ και β. $f'(x) = f'(0) \sin x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

544. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) \cdot f'\left(\frac{1}{x}\right) = x$, για

κάθε $x > 0$. Να αποδειχθεί ότι :

α. $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{xf'(x)}$, για κάθε $x > 0$,

β. $\left[f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) \right]' = 0$, για κάθε $x > 0$.

545. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύουν $f'(0) = 2$ και

$f(x+\psi) = e^x f(\psi) + e^\psi f(x)$ για κάθε $x, \psi \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι $f(0) = 0$

β. Να δείξετε ότι $f(3x) = 3e^{2x}f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

γ. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x)}{2x}$,

δ. Να δείξετε ότι : $f'(x) = 2e^x + f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

546. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 1 με $f(1) = f'(1) = 1$. Να βρείτε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(f(x))^2 - 1}{x - 1}$, β. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - 1}{x - 1}$, γ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}f(x) - 1}{\sqrt{x} - 1}$.

Χρήση κανόνων de l'Hospital.

547. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1 - 2x}{x}$

β. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \varphi 2x}{\eta \mu x}$

γ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{e^x - e}$

δ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \eta \mu x}$

ε. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma \upsilon \nu x}{x^2}$

στ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$

548. Ομοίως :

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2 + \pi}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x}}{1 + x^2}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)} \right).$$

549. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x \sin x} \right)$.

550. Να βρείτε τα όρια :

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x),$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right],$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right]$$

551. Να εξετάσετε αν η f με $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x) - \eta \mu x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής και

παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

552. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f^2(x) - 4x\eta\mu x = x^2 + 4\sigma\upsilon\nu^2 x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και η } C_f \text{ τέμνει τον } \psi\text{'}\psi \text{ στο σημείο } (0, 2).$$

Να δειχθεί ότι :

$$\alpha. f(x) = 2\eta\mu x + \sqrt{x^2 + 4} \text{ με } x \in \mathbb{R},$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2\sigma\upsilon\nu x}{x} = 2.$$

553. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 1$ και $f(0) = 0$, τότε:

$$\alpha. \text{ να βρείτε το } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x},$$

$$\beta. \text{ να βρείτε το } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - x e^x}{x^2},$$

$$\gamma. \text{ να δείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x)}{\eta\mu x - x e^x} = -1.$$

554. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=f'(0)=0$ και $f''(0)=3$.

$$\text{Να βρείτε το όριο } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + x^2}{x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 1}.$$

555. Έστω συνάρτηση f , για την οποία ισχύει: $|f(x) - 3x + 2| \leq e^{2x} - 2e^x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι: $\alpha. f(0) = -2$ και $\beta. f'(0) = 3$.

556. Για την συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $2x^2 f(x) = e^{4x} - 4x - 1$. Να βρείτε τον τύπο της.

Εφαπτόμενη γραφικής παράστασης

557. Η ευθεία $y = \frac{1}{4}x + 1$ είναι η εφαπτόμενη στην C_f στο σημείο με $x_0 = \frac{1}{2}$.

Να υπολογίσετε την τιμή $f'(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})$

558. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a, b, c \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$). Έστω $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ δύο διαφορετικά σημεία της C_f (παράβολή)

Να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη της C_f που είναι παράλληλη στην AB έχει σημείο επαφής με τετμημένη $\frac{x_1 + x_2}{2}$

559. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x' και y' .

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(3, f(3))$.

560. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του διαγράμματος της συνάρτησης f με $f(x) = x^4 - 31x$ στο $A(x_0, \psi_0)$ αν η εφαπτομένη σχηματίζει γωνία 45° με τον Ox .

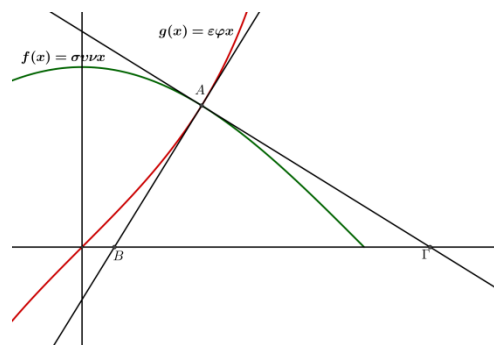
561. Ναδειχτεί ότι η ευθεία $x + 4\psi - 10 = 0$ είναι κάθετη στο διάγραμμα της f με $f(x) = x^2 + 6x + 8$ και να βρεθεί το σημείο του διαγράμματος όπου η ευθεία είναι κάθετη.

562. Να βρεθεί $a \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^3 - ax$ να έχει στο σημείο $x_0 = 1$ εφαπτομένη παράλληλη προς την ευθεία $\psi = 4x - 5$ και να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης.

563. Η ευθεία $\psi = -x$ είναι εφαπτόμενη του διαγράμματος της f με $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$.
Να βρεθεί το σημείο επαφής. Η εφαπτόμενη έχει και άλλα κοινά σημεία με το διάγραμμα της f ;

- 564.** α. Να αποδείξετε ότι για την συνάρτηση $f(x) = \frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}$, με $a, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, και $\beta\gamma, a\delta - \beta\gamma \neq 0$ τα σημεία στα οποία δέχεται εφαπτόμενες παράλληλες, έχουν τετμημένες, x_1, x_2 τέτοια ώστε $x_1 + x_2 = -2\frac{\delta}{\gamma}$.
- 565.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f της $f(x) = \frac{x+9}{x+5}$ που περνά από την αρχή των αξόνων.
- 566.** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^4 - 14x^2 + 24x$. Να δείξετε ότι υπάρχουν τρία σημεία $A, B, \Gamma \in C$ τέτοια ώστε οι εφαπτόμενες της C_f στα A, B, Γ να είναι παράλληλες στον xx' . (Θέμα εξετάσεων)
- 567.** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + 2\alpha x + \beta$. Ναδειχτεί ότι η $\psi = 2\alpha x + \beta$, είναι η εξίσωση της εφαπτομένης του διαγράμματος της f στο σημείο τομής της με τον κατακόρυφο άξονα $\psi'\psi$.
- 568.** Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο:
$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & x \leq 3 \\ \frac{1-e^{x-3}}{x-3}, & x > 3 \end{cases}.$$
- α. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι $a = -\frac{1}{9}$.
- β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(4, f(4))$. (Θέμα 2001)
- 569.** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1+2\ln x}{x}$ $x > 0$. Να βρείτε στη γραφική παράσταση της f σημείο M τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη της f στο σημείο αυτό να διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Δώστε την εξίσωση της αναφερόμενης εφαπτομένης.
- 570.** Δίνεται συνάρτηση $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:
- f παραγωγίσιμη
 - $f(0) = f(3) = -1 = f(1) - 1$
 - $f(x) \leq x - 1$ για κάθε $x \in [0, 3]$.
- Να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη στο $A(0, -1)$ είναι εφαπτόμενη και στο $B(1, f(1))$.

571. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (3x - \alpha)e^{-2x}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του α , ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.
572. Δίνεται η παραβολή $f(x) = x^2 + 4x - 3$. Να βρεθεί το σημείο της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς τον οριζόντιο άξονα xx' .
573. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + 2\alpha x + 3\beta$. Να βρεθούν τα α, β ώστε το διάγραμμα της f να περνά από την αρχή των αξόνων και η εφαπτομένη αυτής στο P που έχει τεταμένη $x=4$ να είναι παράλληλη στον xx' .
574. Να βρείτε τα σημεία τομής της εφαπτόμενης της C_f , με τους άξονες, με $f(x) = (x+1)\sqrt{x}$, η οποία:
I. έχει κλίση 2 και II. δεν περνά από την αρχή των αξόνων.
575. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 1$, $g(x) = x^2 + x + 2$ και $M(1, \gamma)$ κοινό σημείο των C_f και C_g . Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι C_f, C_g έχουν κοινή εφαπτόμενη στο M και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτόμενης.
576. Ναδειχτεί ότι οι εφαπτόμενες στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$ και $g(x) = e^{-x}$ στα σημεία τους με την ίδια τεταμένη είναι κάθετες.
577. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f^3(x) + x^3 = xf(x)$, για κάθε $x > 0$. Να δείξετε ότι η ευθεία $x + y - 1 = 0$ εφάπτεται της C_f σημείο $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
578. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ και $g(x) = x^2 - x$. Αποδείξτε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη και της οποίας να βρείτε την εξίσωση.
579. Στο διπλανό σχήμα έχουμε τις AB, AG εφαπτόμενες στο κοινό σημείο A των C_g και C_f , όπου $f(x) = \sin x$ και $g(x) = \varphi x$ στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
Να αποδείξετε ότι :
α. το $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και



$$\beta. \frac{A\Gamma}{AB} = \varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

580. Έστω η συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = 2015 + |\ln(x-1)|$

Έστω c πραγματικός μεγαλύτερος του 2015. Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $y = c$ και η γραφική παράσταση της f τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία του επιπέδου, τα A και B .

Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f , στα A και B , είναι κάθετες μεταξύ τους.

581. Η καμπύλη $C(x, y)$ αποτελείται από τα σημεία με $x(t) = 2t^3$ και $y(t) = 2+t^2$, $t \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης στα σημεία :

α. $A(0, 2)$ και β. $(2, 3)$.

582. Να βρείτε την εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της $y = (x+1)^{(x+2)}$, $x > -1$, στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $y' y$.

583. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 3$ με την εφαπτόμενη της C_f στο σημείο

της $M(3, 1)$ να έχει συντελεστή διεύθυνσης 4. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) - f^2(3)}{x - 3}$.

584. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

- $f(x+y) = f(x) f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 2$.

α. Να δείξετε ότι $f'(x) = 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης στο $M(0, f(0))$.

585. Η ευθεία $y = 4x+1$ είναι εφαπτόμενη της C_f της παραγωγίσιμης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, στο $M(0, f(0))$. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad \beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}, \quad \gamma. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \sin x - 1}{x}.$$

Ρυθμός μεταβολής

586. Ένα υλικό σημείο κινείται σε άξονα και η θέση του δίνεται από τη σχέση

$$x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t, \quad t \text{ ο χρόνος.}$$

α. Να βρείτε την χρονική στιγμή κατά την οποία το σώμα βρίσκεται στην αρχή του

άξονα O ,

β. Να βρείτε την ταχύτητα του σώματος σε χρόνο t και να προσδιορίσετε τη στιγμή που το σώμα είναι ακίνητο.

γ. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της ταχύτητας και την χρ. στιγμή που παρουσιάζεται,

δ. Πότε το σώμα κινείται προς την θετική και πότε προς την αρνητική κατεύθυνση;

ε. Να δείξετε ότι με την πάροδο του χρόνου η επιτάχυνση του σώματος αυξάνει.

587. Η ακτίνα ενός κύκλου μεταβάλλεται με ρυθμό $0,1 \text{ cm/sec}$. Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδόν του κύκλου όταν η ακτίνα του είναι $R=5 \text{ cm}$.

588. Η είσπραξη από την πώληση x μονάδων ενός προϊόντος είναι $E(x) = -3x^3 + 6000x \text{ €}$. Ενώ το κόστος για την παραγωγή των x μονάδων είναι $K(x) = 1000x \text{ €}$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του κέρδους μόλις πωληθούν 100 μον. προϊόντος.

589. Δίνεται η ορθή γωνία xOy και το ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους 10m του οποίου τα άκρα A και B ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy και Ox αντιστοίχως. Το σημείο B κινείται με σταθερή ταχύτητα $v=2\text{m/sec}$ και η θέση του πάνω στον άξονα Ox δίνεται από τη συνάρτηση $v(t)=vt$, $t \in [0,5]$ όπου t ο χρόνος σε δευτερόλεπτα
α. Να βρείτε το εμβαδόν $E(t)$ του τριγώνου AOB ως συνάρτηση του χρόνου
β. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $E(t)$ τη χρονική στιγμή που το μήκος του τμήματος OA είναι 6m . (ΘΕΜΑ 1993)

590. Βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου ενός κύβου ως προς το χρόνο όταν η πλευρά του αυξάνεται με ρυθμό $2 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ τη στιγμή που αυτή είναι 10cm .

591. Ο ρυθμός μεταβολής του όγκου ενός σφαιρικού μπαλονιού είναι $100 \frac{\text{cm}^3}{\text{sec}}$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της ακτίνας της σφαίρας ως προς το χρόνο τη στιγμή που η τιμή της είναι 5cm .

592. Έστω $f(t)$ είναι η ποσότητα ενός αντιβιοτικού που έχει απορροφηθεί από το ανθρώπινο σώμα κατά την χρονική στιγμή t , όπου $t \geq 0$ και

$f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι πραγματική συνάρτηση με $f(\sqrt{t}) = 1 - 2^{-\frac{\sqrt{t}}{499}}$. Να βρεθεί η χρονική στιγμή t_1 , κατά την οποία ο ρυθμός απορρόφησης του αντιβιοτικού από το ανθρώπινο σώμα είναι ίσος με το $\frac{1}{16}$ του ρυθμού απορρόφησης κατά την χρονική στιγμή $t_0 = 0$.

- 593.** Ένας γεωργός προσθέτει x μονάδες λιπάσματος σε μια γεωργική καλλιέργεια και συλλέγει $g(x)$ μονάδες του παραγομένου προϊόντος.
Αν $g(x) = M_0 + M(1 - e^{-\mu x})$, $x \geq 0$, όπου M_0 , M και μ είναι θετικές σταθερές, να εκφράσετε το ρυθμό μεταβολής του παραγομένου προϊόντος ως συνάρτηση της $g(x)$.
Ποια είναι η σημασία της σταθεράς M_0 ; (Θέμα εξετάσεων)
- 594.** Υλικό σημείο κινείται σε επίπεδο αξόνων με θέσεις (x, y) που καθορίζονται από τις εξισώσεις: $x = x(t) = t + \eta \mu t$, $y = y(t) = t - \sigma \nu t$, $t \geq 0$.
α. Να δείξετε ότι η ταχύτητα v δίνεται από την σχέση $v = \sqrt{3 + 2(x - y)}$,
β. Να δείξετε ότι το μέτρο της επιτάχυνσης είναι σταθερό.