

Θεώρημα Rolle

- 595.** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = |x| + 1$. Να εξετάσετε αν ισχύει το θεώρημα του Rolle στο $[-2, 2]$.
- 596.** Θεωρούμε την συνάρτηση $\psi = 1 + \sqrt[5]{(x+2)^4}$.
- α. Να βρείτε το π.ο. της
- β. Να βρείτε την παράγωγό της
- γ. Να εξετάσετε αν ισχύει το Θ. Rolle στο διάστημα $[-3, -1]$.
- 597.** Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο (α, β) με $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = \kappa \in \mathbb{R}$.
- Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε $f'(\xi) = 0$.
- 598.** Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} x^2 + mx + n, & x \in [-1, 0) \\ px^2 + 4x + 4, & x \in [0, 1] \end{cases} \quad m, n, p \in \mathbb{R}.$
- Να οριστούν οι παράμετροι m, n, p ώστε η f να ικανοποιεί τις συνθήκες του θεωρήματος Rolle.
- 599.** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να δειχτεί ότι :
- α) Για τη συνάρτηση g με $g(x) = (x^2 - 1)f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο διάστημα $[-1, 1]$
- β) Υπάρχει $x_0 \in (-1, 1)$ ώστε $f'(x_0) = \frac{2x_0}{1 - x_0^2} f(x_0)$.
- 600.** Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε :
- α. $(\xi^2 - \xi)f'(\xi) = (1 - 2\xi)f(\xi)$,
- β. $f'(\xi) = 3e^{3\xi - f(\xi)}$ αν ακόμα είναι και $f(0) = 0$ και $f(1) = 3$,
- γ. $f'(\xi) = f(\xi)\sin \xi$, με $\xi \in (0, \pi)$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 601.** Έστω συνάρτηση f , συνεχής στο $[1, e]$, παραγωγίσιμη στο $(1, e)$ με $f(e) - f(1) = 1$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση $xf'(x) = 1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, e)$.
- 602.** Έστω f συνεχής στο $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ με $f(1) = f(2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = (2\xi - 3)e^{-f(\xi)}$.

- 603.** Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ πραγματικός ώστε να ισχύει: $\frac{\xi}{\xi^2 + 1} f(3\xi) = -\frac{3}{2} f'(3\xi)$
- 604.** Έστω ότι η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) . Αν $g(x) = e^{f(x)}(x-a)(x-b)$ ναδειχτεί ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $f'(\xi) = \frac{a+b-2\xi}{(\xi-a)(\xi-b)}$.
- 605.** Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{ax^3}{3} + \left(\frac{b}{2} + c\right)x^2 + (c-d)x + d$ όπου a, b, c, d πραγματικοί αριθμοί και ισχύει ότι $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + 2c = d$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον xx' .
- 606.** Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση. Να αποδείξετε ότι:
α. αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η f είναι 1-1.
β. μεταξύ δύο άνισων ριζών της f βρίσκεται το πολύ μια ρίζα της $f'(x) = 0$.
- 607.** Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση και x_1, x_2 ρίζες της ($x_1 < x_2$). Να δείξετε ότι υπάρχει $a \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $M(a, f(a))$, να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- 608.** Αν ρ_1, ρ_2 , είναι δυο ρίζες της εξίσωσης $x^4 - 4x^2 + 4\lambda x + 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε η εξίσωση $x^3 - 2x + \lambda = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (ρ_1, ρ_2) .
- 609.** Να δείξετε ότι μεταξύ των ριζών της εξίσωσης $e^x \eta \mu x = 1$ υπάρχει ρίζα της $e^x \sigma \nu x + 1 = 0$.
- 610.** Αν f συνάρτηση ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και η παραβολή $\psi = \kappa x^2$, $\kappa \neq 0$ έχει δύο κοινά σημεία με την C_f , να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = \frac{2f(x)}{x}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, +\infty)$.

- 611.** Έστω συνάρτηση g τέτοια ώστε $g(0) = g(1) = 0$ και παραγωγίσιμη συνάρτηση f τέτοια ώστε $g(x)f'(x) + f(x) = 1$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας $x_0 \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = 1$.
- 612.** Να δείξετε ότι
- α. Για τη συνάρτηση g με $g(x) = (x^2 + 1)(x - 2)^2(x - 3)^3$ υπάρχει $\xi \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$.
- β. Η εξίσωση $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{2}{x - 2} + \frac{3}{x - 3} = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(2,3)$.
- 613.** Αν φ συνάρτηση συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) με $\varphi(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{\varphi'(x_0)}{\varphi(x_0)} = \frac{1}{a - x_0} + \frac{1}{\beta - x_0}$.
- 614.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $a^x = \beta x$ με $0 < a < 1$ και $\beta > 0$ έχει μία μόνο πραγματική ρίζα.
- 615.** Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ . Ναδειχθεί ότι η εξίσωση $\alpha \sin x + \beta \sin 2x + \gamma \sin 3x = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$.
- 616.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $3x^4 + x^2 - 2x - 2 = 0$ έχει το δύο πολύ ρίζες πραγματικές.
- 617.** Να δείξετε ότι η εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της C_f της $f(x) = x^4$, έχει μοναδικό κοινό σημείο με την C_f το σημείο επαφής.
- 618.** Έστω μια συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:
- α. είναι συνεχής στο $[1, e]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, e)$
- β. $f(e) - f(1) = 1$.
- Δείξτε ότι η εξίσωση $xf'(x) = 1$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(1, e)$.
- 619.** Αν f, g συνεχείς στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμες στο (a, β) με $g(a) = g(\beta) = 0$, να δείξετε ότι $f'(x)g(x) + g'(x)f(x) = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (a, β) .
- 620.** Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τις εξής ιδιότητες :
- ι. Είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμες στο (a, β) ,
- ii. Για κάθε $x \in [a, \beta]$ είναι $g(x) \neq 0$ και για κάθε $x \in (a, \beta)$ είναι $g'(x) \neq 0$.
- iii. $f(a)g(\beta) - f(\beta)g(a) = 0$.
- Να δείξετε ότι :

α. Για την συνάρτηση F με $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, ισχύει το θεώρημα Rolle στο $[a, b]$ και

β. Υπάρχει $x_0 \in (a, b)$, ώστε: $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

621. Έστω f συνεχής στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b) με $a > 0$ και $e^{f(a)-f(b)} = \frac{b}{a}$.

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xf'(x) + 1 = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (a, b) .

622. Δίνονται συνάρτηση $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f(a) = f(b) = 0$ και

$\rho \in (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$. Ορίζουμε την συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x - \rho}$. Να δείξετε

α. ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ με $g'(\xi) = 0$

β. η εφαπτόμενη ευθεία της C_f στο $(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από το σημείο $(\rho, 0)$.

623. Έστω συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ με $0 < a < b$ με $f(a) = a$, $f(b) = b$ και $f(\gamma) = \gamma \in (a, b)$. Να αποδείξετε ότι:

α. υπάρχουν $x_1, x_2 \in (a, b)$ τέτοια ώστε $f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1}$ και

$f'(x_2) = \frac{f(x_2)}{x_2}$.

β. αν η ευθεία των $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ περνά από την αρχή των αξόνων να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ έτσι ώστε $f''(x_0) = 0$.

624. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$ και $f'(x) \neq 1$ για κάθε $x \in (0, 1)$.

Να δείξετε ότι η C_f τέμνει την διχοτόμο της $1^{\text{ης}}$ γωνίας των αξόνων σε ένα μόνο σημείο $x_0 \in (0, 1)$.

625. Έστω f παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με συνεχή παράγωγο στο $[0, 1]$ και $f(1) = f(0) + \frac{1}{2}$,

$f'(0) > 0$. Να δείξετε ότι:

α. Υπάρχει $\alpha \in (0, 1)$ ώστε $f'(\alpha) = \alpha$

β. Υπάρχει $\beta \in (0, 1)$ ώστε $f'(\beta) = 2\beta$.

626. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[α, β]$, παραγωγίσιμη στο $(α, β)$ με $f(α) = 0$ και $f'(x) \neq 0, \forall x \in (α, β)$. Να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(α, β)$.
627. Έστω μια συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(α) = f(β)$ και $f'(α) = f'(β) = 0, α < β$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν δυο τουλάχιστον σημεία $\chi_1, \chi_2 \in (α, β)$ τέτοια ώστε $f''(\chi_1) = f''(\chi_2)$.
628. Θεωρούμε την δυο φορές παραγωγίσιμη f στο $[0, 2]$ με $f(0) = f(2) = 0$ και $g(x) = f(1)(2x - x^2)$.
- α. Δείξτε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον ξ_1, ξ_2 με $\xi_1 \neq \xi_2$ στο $(0, 2)$ ώστε $g'(\xi_1) = f'(\xi_1)$ και $g'(\xi_2) = f'(\xi_2)$.
- β. Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ ώστε $f(1) = -\frac{1}{2}f''(\xi)$
629. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[α, β]$ και παραγωγίσιμη στο $(α, β)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0 \in (α, β)$ ώστε $f'(\chi_0) = \frac{f(\chi_0) - f(α)}{\beta - \chi_0}$.

Θεώρημα μέσης τιμής

630. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 3x & x \in [0,1] \\ x^3 + 2 & x \in (1,2] \end{cases}$. Να βρείτε $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(2) - f(0)}{2}$.
631. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$. Αν $f(0) = 2$ και $f(1) = 4$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_2 \in (0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 2000$.
632. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[α, β]$, παραγωγίσιμη στο $(α, β)$ και $f(α) = f(β)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (α, β)$ με $α < \xi_1 < \frac{α+β}{2} < \xi_2 < β$, ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.
633. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [α, β] \rightarrow \mathbb{R}$, που είναι παραγωγίσιμη στο $(α, β)$, με $f(α) = β$ και $f(β) = α$. Να αποδείξετε ότι :

α. η εξίσωση $f(x) = x$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο (α, β) .

β. υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε : $f'(x_1) = \frac{1}{f'(x_2)}$

634. Να δείξετε ότι $(\beta - \alpha)\varepsilon\varphi\alpha < \ln(\sigma\upsilon\nu\alpha) - \ln(\sigma\upsilon\nu\beta) < (\beta - \alpha)\varepsilon\varphi\beta$, για κάθε $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$

635. Για τη συνάρτηση f με $f(x) = \ln x$ να αποδείξετε ότι:

α. $\frac{1}{2} < \ln 2 < 1$.

β. $\frac{x-1}{x} \leq \ln x \leq x-1$ για κάθε $x > 0$.

636. Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g που έχουν πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, +\infty)$, για τις οποίες ισχύει η σχέση :

$$f'(x) = g'(x) + \eta\mu^2 x + e^x \text{ για } x \in [0, +\infty).$$

Να δείξετε ότι $f(0) + g(x) < g(0) + f(x)$ για κάθε $x \in (0, \infty)$. (Θέμα εξετάσεων)

637. Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με $1 \leq f'(x) \leq 2$ για κάθε $x \geq 0$ και $f(0) = 0$. Να δείξετε ότι η C_f περιέχεται μεταξύ των ευθειών $\psi = x$ και $\psi = 2x$.

638. Δίνεται η συνάρτηση $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(1, 3)$ για την οποία ισχύει $f(3) + f(1) = 2f(2) + 2$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ τέτοιος ώστε $f''(\xi) = 2$

639. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη για την οποία $f'(x) \geq 1$ για κάθε $x \geq 2004$. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

640. Έστω f, g συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο (α, β) και συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ με $g'(x) \neq 0, \forall x \in (\alpha, \beta)$. Να δείξετε ότι

α. $g(\alpha) \neq g(\beta)$

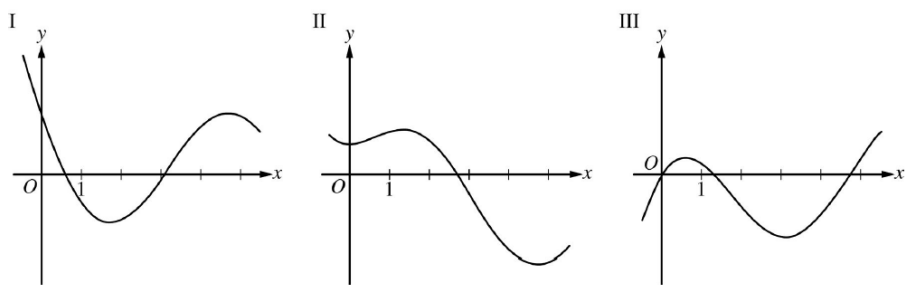
β. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Σταθερή συνάρτηση

641. Δίνεται συνάρτηση φ ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $\varphi(x) + x\varphi'(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^{x\varphi(x)} + 1$ είναι σταθερή.

- 642.** Αν για την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $|\psi f(x) - x f(\psi)| \leq |x^3 \psi - 2x^2 \psi^2 + x \psi^3|$ και $f'(0) = \kappa$ για κάθε $x, \psi \in \mathbb{R}$ τότε $f(x) = \kappa x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 643.** Αν για την περιττή και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f ισχύει $f(x) = x f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $f(1) = 2$ να δείξετε ότι $f(x) = 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- 644.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με τιμές θετικές και $f'(x)f(-x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$ να δείξετε ότι $f(x) = e^x$.
- 645.** Να βρείτε συνάρτηση φ τρεις φορές παραγωγίσιμη τέτοια ώστε $\varphi(0) = -1$, $\varphi(-1) = -5$, $\varphi(1) = 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $\varphi^{(3)}(x) = 12$.
- 646.** Να βρείτε συνάρτηση f για την οποία ισχύουν $f^{(3)}(x) = 12$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f''(0) = 8$ και στο $A(1,2)$ η C_f έχει κλίση 1.
- 647.** Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
- $$f(x) = -\frac{x f'(x)}{2} \ln x.$$
- Να δείξετε ότι :
- α. Η συνάρτηση g με $g(x) = f(x) \ln^2 x$ είναι σταθερή στο $(1, +\infty)$.
- β. Αν $f(e) = 3$ να βρείτε την συνάρτηση f .
- γ. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση f .
- 648.** Έστω f, g , συναρτήσεις ορισμένες σε διάστημα Δ με $0 \in \Delta$ για τις οποίες ισχύουν ακόμη τα εξής:
- είναι δύο φορές παραγωγίσιμη
 - $f(0) = g(0)$
 - $f'' = g''$
- Να δείξετε ότι :
- α. $f(x) - g(x) = cx$ για κάθε $x \in \Delta$, $c \in \mathbb{R}$
- β. Αν $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$, με $\rho_1 < 0 < \rho_2$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [\rho_1, \rho_2]$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0$. (Θέμα 1989)
- 649.** α. Αν για παραγωγίσιμη, στο διάστημα Δ , συνάρτηση f ισχύει $f'(x) + f(x) = 0$, για κάθε $x \in \Delta$ τότε $f(x) = ce^{-x}$, όπου $c \in \mathbb{R}$ σταθερός.
- β. Να βρείτε συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ με $g(e) = e^{-e}$ και $[g(x) + g'(x)] \ln x^x + g(x) = 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

650. Δίνεται συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g''(x) = 4[g'(x) - g(x)]$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε συνάρτηση $f(x) = e^{-2x+1} g(x)$ αν γνωρίζουμε ότι η C_f εφάπτεται στο $A(1,2)$ της γρ. παρ. της $\varphi(x) = x^2 + 1$.
651. Στην εικόνα δίνονται τα γραφήματα των συναρτήσεων f , f' , και f'' μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.



Να συμπληρώσετε τον πίνακα

Συνάρτηση	Γράφημα
f	
f'	
f''	

Μονοτονία Ακρότατα

652. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} - (\lambda + 2)x^2 + (2\lambda^2 + 5\lambda + 3)x + 1$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

653. Να εξετάσετε την μονοτονία των συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^{x^2}, x > 0$ και

β) $f(x) = 2\sin x - \sin 2x + 3, x \in [0, 2\pi]$

γ) $f(x) = (x+1)e^x - ex\left(2 + \frac{x}{2}\right) + 1, x \in \mathbb{R}$.

δ) $f(x) = \frac{x(e^x + 1)}{e^x}, x \in \mathbb{R}$

654. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} + 4$, $x > 0$. Να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f .
655. Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει $f(0) = g(0)$ και $f'(x) > g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:
- α. $f(x) < g(x) \quad \forall x \in (-\infty, 0)$
- β. $f(x) > g(x) \quad \forall x \in (0, +\infty)$.
656. α. Αν $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) > 0$ και $g'(x) < 0$ να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g τέμνονται σε ένα το πολύ σημείο.
- β. Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g των συναρτήσεων $f(x) = e^x + 2x$ και $g(x) = e^{-x} - x^3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο που βρίσκεται στον άξονα $\psi\psi$.
657. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x^3 + 3x + 1 = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(-1, 0)$.
658. Να δείξετε ότι οι γρ. παρ. των συναρτήσεων $\varphi(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ και $g(x) = 2x + 1$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.
659. α. Να αποδείξετε ότι: $\ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5}$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$.
- β. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη το $[0, +\infty)$, για την οποία ισχύει $[f(x)]^5 + 2[f(x)]^3 + 3f(x) = (x+1)\ln(x+1) - \frac{4}{5}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 182$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.
- (Θέμα εξετάσεων)
660. Να δείξετε ότι :
- α) $e^x - x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- β) Η εξίσωση $2e^x + 2x = x^2 + 2$ έχει ακριβώς μια λύση την $x=0$
- .(Θέμα εξετάσεων)
661. Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g που έχουν πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, +\infty)$, για τις οποίες ισχύει η σχέση :

$$f'(x) = g'(x) + \eta \mu^2 x + e^x \text{ για } x \in [0, +\infty).$$

Να δείξετε ότι $f(0) + g(x) < g(0) + f(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

- 662.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, e]$ με $0 < f(x) < 1$ και $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e]$, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x_0 \in (1, e)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) + x_0 \ln x_0 = x_0$.

- 663. α.** Να λυθεί η εξίσωση: $1 - x^2 - \ln x = 0$,

β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x} + 1 - x, x > 0$.

Να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

- 664.** Να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = x^2 \ln 27 - 6x \ln 27 + (3x^2 - 18x + 24) \ln(x^2 - 6x + 8)$.

- 665. α)** Να αποδείξετε ότι η f με $f(x) = x - \frac{1}{x} + 2 \ln x, x > 0$ είναι γνησίως αύξουσα

β) Να υπολογίσετε το $f(1)$ και να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία μόνο πραγματική ρίζα στο $x_0 = 1$.

γ) Αν M και N είναι σημεία της γραφικής παράστασης της f με τετμημένες x και $\frac{1}{x}$ να

βρείτε σχέση που να συνδέει τις τεταγμένες αυτών.

- 666.** Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1, x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0.$$

ι) Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f .

ii) Να δείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < x f'(x)$ για κάθε $x > 0$.

- 667.** Η ταχύτητα ενός υλικού σημείο πάνω σε άξονα δίνεται από την σχέση

$$v(t) = (t-2)^2(t-5), \text{ όπου } t \geq 0, \text{ ο χρόνος. Να βρείτε}$$

α. την φορά της κίνησης του σημείου,

β. τις χρονικές στιγμές που το σημείο ακινητεί,

γ. τα διαστήματα που η ταχύτητα αυξάνεται και που μειώνεται

δ. τις χρονικές στιγμές που μηδενίζεται η επιτάχυνσή του.

668. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

α. $f(x) = e^{-x}(x^2+x-5)$, με $D_f = [-4, 4]$,

β. $f(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{\ln 2}$, με $D_f = [-1, 2]$,

γ. $f(x) = |x^2+2x-3| + \frac{3}{2} \ln x$, με $D_f = [\frac{1}{2}, 4]$.

669. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2 + \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Αν $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι τοπικά ακρότατα της C_f και $x_1 < x_2 < x_3$, να αποδείξετε ότι η ευθεία AB είναι κάθετη στην ευθεία BΓ

β. Αν $0 < \alpha < 1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $(-1, 0)$. (Θέμα εξετάσεων)

670. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^\alpha e^{2\alpha-x}$, $x > 0$ και $\alpha \in (0, +\infty)$

α. Να δείξετε η f παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x_0 = \alpha$

β. Αν $M(\alpha)$ το μέγιστο της f τότε να βρείτε την τιμή του α για την οποία το $M(\alpha)$ γίνεται ελάχιστο.

671. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2}{x-4}$, $x \neq 4$. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας

της f καθώς επίσης και το είδος της μονοτονίας της f σε κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα και τα τοπικά της ακρότατα.

672. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης $f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$

με $f(x) = \eta \mu^2 x - \sqrt{2} \eta \mu x + 2\sqrt{2}$. (Θέμα εξετάσεων)

673. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της $f(x) = 2\eta \mu^2 x - 2\eta \mu x + 3$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

674. Βρείτε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ τέτοια ώστε να μηδενίζεται στη θέση $x_0 = 0$ και να έχει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_1 = 1$ και τοπικό μέγιστο στην

$x_2 = -\frac{7}{3}$.

- 675.** Δίνεται η f με $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1}$. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης. (Θέμα εξετάσεων).
- 676.** Μια καμπύλη $C(x, y)$ έχει για $x = 3 + \frac{4}{t}$, $y = 4 + \frac{3}{t^2}$, $t > 0$.
- α. Να βρείτε τα σημεία τομής A, B , της C με την $y = x$.
- β. Να βρείτε το σημείο τομής των εφαπτόμενων στα A, B .
- γ. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $y = y(x)$.
(Χρησιμοποιήστε την σχέση $dy = y'(x)dx$).
- 677.** Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν :
- $$f(0) = 1 \text{ και } e^{2x}f(x) - 1 \leq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,1)$.
- 678.** Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $(x^2 - 1)(f(x) - x^3) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
- Να δείξετε ότι:
- α. $f(1) = 1$ και $f(-1) = -1$
- β. υπάρχει $\xi \in (-1,1)$ ώστε $f'(\xi) = 1$.
- 679.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \ln x + \beta x^2 + x + 2$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- Να βρεθούν οι τιμές των α, β για τις οποίες η f , έχει ακρότατα στα $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$.
- 680.** Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) - 2x(\ln x - 1)$ με $x > 0$.
- α. Να βρείτε την f' για κάθε $x \in (0, +\infty)$,
- β. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- 681.** Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$. Αν ισχύει $f''(x) \cdot \sin^2 x > f'(x) \cdot \ln 2x$, για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$, να αποδείξετε ότι $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

682. Τη χρονική στιγμή $t=0$ χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του

φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση $f(t) = \frac{\alpha t}{1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2}$, $t \geq 0$

όπου α και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

α. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β .

β. Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά. (Θέμα 2000)

683. Για μια συνάρτηση f , που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, ισχύει ότι: $f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$. (Θέμα 2001)

684. Στο διπλανό σχήμα είναι $B\Gamma = 30$ m, $\hat{A} = 60^\circ$ και

$$\hat{B} = \theta.$$

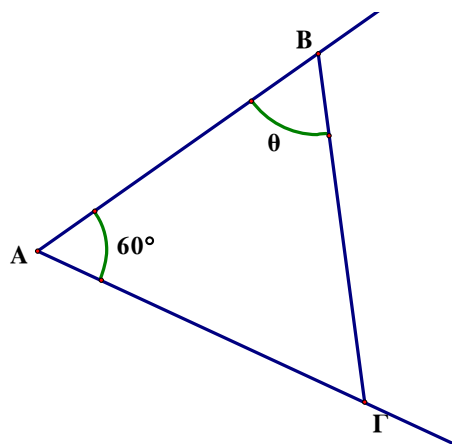
α. Να βρείτε τις δυνατές τιμές του θ .

β. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του $\triangle AB\Gamma$ δίνεται από την σχέση

$$E(\theta) = 300\sqrt{3} \eta\mu\theta\eta\mu\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right).$$

γ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν είναι μέγιστο όταν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Ποια είναι η μέγιστη τιμή του εμβαδού;



685. Ένα τουριστικό λεωφορείο έχει να διανύσει απόσταση 625 km με σταθερή ταχύτητα x km την ώρα. Σύμφωνα με τον Κώδικα Οδικής Κυκλοφορίας το μέγιστο όριο ταχύτητας είναι 90 km την ώρα. Τα καύσιμα κοστίζουν 160 δραχμές το λίτρο, η

ωριαία κατανάλωση είναι $\left(5,5 + \frac{x^2}{200} \right)$ λίτρα και η αμοιβή του οδηγού είναι

2000 δραχμές την ώρα.

α. Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος $K(x)$ της διαδρομής είναι:

$$K(x) = \frac{1800000}{x} + 500x, \quad 0 < x \leq 90.$$

β. Να βρείτε την ταχύτητα του λεωφορείου για την οποία το κόστος της διαδρομής γίνεται ελάχιστο.

- 686.** Μια βιομηχανία παράγει x ποσότητα ενός προϊόντος με κόστος που δίνεται από την συνάρτηση $K(x) = \frac{\alpha}{4}x^3$, όπου $x > 0$ και η παράμετρος $\alpha \in \left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2} \right]$. Τα έσοδα από την

πώληση x ποσότητας του προϊόντος δίνονται από την συνάρτηση

$$E(x) = x^2, \quad x \in (0, +\infty).$$

α. Να βρείτε την ποσότητα x_0 , για την οποία το κέρδος είναι μέγιστο, το οποίο συμβολίζουμε με $M(\alpha)$.

β. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2} \right]$, για την οποία το $M(\alpha)$ γίνεται μέγιστο, καθώς

και το μέγιστο αυτό κέρδος.

(Θέμα εξετάσεων)

- 687.** Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(t) = 2t + \mu$, $t \in \mathbb{R}$, όπου η παράμετρος είναι ένας πραγματικός αριθμός.

Μια επιχείρηση έχει έσοδα $E(t)$, που δίνονται σε εκατομμύρια δραχμές, από τον τύπο $E(t) = (t-1)\varphi(t)$, $t \geq 0$ όπου t συμβολίζει το χρόνο σε έτη. Το κόστος λειτουργίας $K(t)$, της επιχείρησης δίνεται, επίσης σε εκατομμύρια δρχ, από τον τύπο $K(t) = \varphi(t+4)$, $t \geq 0$.

α) Να βρείτε την συνάρτηση κέρδους $P(t)$, για $t \geq 0$, όταν γνωρίζουμε ότι κατά το πρώτο έτος λειτουργίας η επιχείρηση παρουσίασε ζημιά δώδεκα εκατομμύρια δρχ.

β) Ποια χρονική στιγμή θα αρχίσει η επιχείρηση να παρουσιάζει κέρδη;

γ) Ποιος θα είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης κέρδους στο τέλος του

δεύτερου έτους;

(Θέμα εξετάσεων)

688. Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = 2^{12}(e^{-4x} - e^{-ax})$, όπου $a > 4$.

α) Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = h(0) = 0$.

β) Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα την συνάρτηση $h(x)$,

γ) Αν x_1 είναι ρίζα της πρώτης παραγώγου και x_2 είναι ρίζα της δεύτερης παραγώγου της $h(x)$, να βρείτε την σχέση που συνδέει τα x_1, x_2 .

(Θέμα εξετάσεων)

689. Η αξία μιας μηχανής που εκτυπώνει βιβλία μειώνεται με το χρόνο t , σύμφωνα με την

συνάρτηση $f(t) = \frac{7A}{2} e^{-\frac{t+28}{14}}$, $t \geq 0$, όπου A θετικός αριθμός. Ο ρυθμός μεταβολής του

κέρδους $K(t)$, από την πώληση των βιβλίων που εκτυπώνει η συγκεκριμένη μηχανή,

δίνεται από την συνάρτηση $K'(t) = \frac{A}{4} e^{-\frac{t}{7}}$, $t \geq 0$ και υποθέτουμε ότι $K(0)=0$. Να βρεθεί η

χρονική στιγμή που πρέπει να πουληθεί η μηχανή, έτσι ώστε το συνολικό κέρδος $P(t)$ από τα βιβλία συν την αξία της μηχανής να γίνεται μέγιστο. (θέμα εξετάσεων)

690. Φάρμακο χορηγείται σε ασθενή για πρώτη φορά. Έστω $f(t)$ η συνάρτηση που

περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μετά από χρόνο t από τη χορήγησή του, όπου $t \geq 0$.

Αν ο ρυθμός μεταβολής της $f(t)$ είναι $\frac{8}{t+1} - 2$

α) Να βρείτε τη συνάρτηση $f(t)$.

β) Σε ποια χρονική στιγμή t , μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, η συγκέντρωσή του στον οργανισμό γίνεται μέγιστη;

γ) Να δείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή $t = 8$ υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό, ενώ πριν τη χρονική στιγμή $t = 10$ η επίδρασή του στον οργανισμό έχει μηδενιστεί. (Δίνεται $\ln 11 \cong 2,4$).

(Θέμα

2000)

691. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2(x-3)+4$. Έστω x_1, x_2 είναι τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και x_3 το σημείο στο οποίο παρουσιάζει καμπή. Να δείξετε ότι τα σημεία του επιπέδου $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά.

- 692.** Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \left(a - \frac{2}{3}\right)x^3 - \left(a + \frac{2}{3}\right)x^2 - 10x = 7, \forall x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $a \in \mathbb{R}$ ώστε η f να παρουσιάζει καμπή στο $x = \frac{3}{2}$. Μετά για την τιμή αυτή του a να σχηματίσετε τον πίνακα μεταβολών της f .
- 693.** Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 - (k-1)x^2 + 5(k-4)x - 1$.
 α) Να βρεθεί το $k \in \mathbb{R}$ ώστε η f να παρουσιάζει καμπή στο $x_0 = 1$
 β) Για την τιμή του k που θα βρείτε να κάνετε τον πίνακα μεταβολών και την γραφική παράσταση της f .
- 694.** Δίνεται ο θετικός πραγματικός αριθμός a και η συνάρτηση f με $f(x) = ax^2 - 2x \ln x$ με $x \in (0, +\infty)$
 α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.
 β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γρ. παρ. της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$ και να προσδιορίσετε το a , ώστε η εφαπτομένη αυτή να διέρχεται από την αρχή των αξόνων. (Θέμα εξετάσεων)
- 695.** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, που παρουσιάζει σε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ τοπικό ακρότατο το 0 και ικανοποιεί την σχέση $f''(x) > 4(f'(x) - f(x))$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)e^{-2x}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
 β. Να αποδείξετε ότι είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Θέμα εξετάσεων)
- 696.** α. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με τιμές στο $(0, +\infty)$. Ναδειχθεί ότι η συνάρτηση g με $g(x) = \ln f(x)$ στρέφει τα κοίλα άνω αν και μόνο αν ισχύει η σχέση $f(x)f''(x) \geq [f'(x)]^2$, για κάθε $x \in \Delta$.
 β. Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα, στο οποίο η συνάρτηση g με $g(x) = \ln(x^2 + 2)$ στρέφει τα κοίλα άνω. (Θέμα εξετάσεων)
- 697.** Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ με $\kappa < \lambda$ και η συνάρτηση $f(x) = (x - \kappa)^5(x - \lambda)^3$ με $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
 α. $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{5}{x - \kappa} + \frac{3}{x - \lambda}$ για κάθε $x \neq \kappa$ $x \neq \lambda$.

β. Η συνάρτηση $g(x)=\ln|f(x)|$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα (κ, λ) .

(Θέμα εξετάσεων)

698. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$ και για κάθε $x>0$ ισχύει $xf'(x) = f(x) + e^x - x$, να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

699. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 \sin 2\alpha + 2x \sin^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha$, $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του α η γραφική παράσταση της f έχει μόνο ένα σημείο καμπής, το οποίο για τις διάφορες τιμές του α ανήκει σε παραβολή. (Θέμα εξετάσεων)

700. Δίνεται η συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση g τέτοια ώστε $g(x)f'(x) = 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι, αν η γραφ. παρασ. της f έχει σημείο καμπής το $A(x_0, f(x_0))$, τότε η εφαπτομένη της γραφ. παρασ. της g στο $B(x_0, g(x_0))$, είναι παράλληλη στη ευθεία $\psi - 2x + 5 = 0$.

701. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + 3\mu x^2 - \frac{9\mu}{2}x + \mu^2 + 1$

α) Να δειχτεί ότι για κάθε τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$ η C_f έχει ένα σημείο καμπής

β) Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής είναι κάθετη στην ευθεία (δ) με εξίσωση $2x - 3y = 0$.

702. Η καμπύλη $C(x, y)$ καθορίζεται από τα σημεία $x(t) = 8 - \frac{1}{t^3}$ και $y(t) = t^3 - 1$, $t \neq 0$.

α. Να δείξετε ότι η καμπύλη τέμνει τους άξονες σε δύο μοναδικά σημεία (από ένα σε κάθε άξονα) και να τα προσδιορίσετε.

β. Να βρείτε τις εφαπτόμενες στην καμπύλη στα σημεία αυτά και να δείξετε ότι τέμνονται σε σημείο της $x + 8y = 0$.

γ. Να δείτε ότι η καμπύλη δεν έχει σημεία καμπής.

703. Δίνεται πραγματική συνάρτηση g , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $g(x) > 0$ και $g''(x)g(x) - [g'(x)]^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση $\frac{g'}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα και

ii. $g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \sqrt{g(x_1)g(x_2)}$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

704. Να βρείτε το σύνολο τιμών των

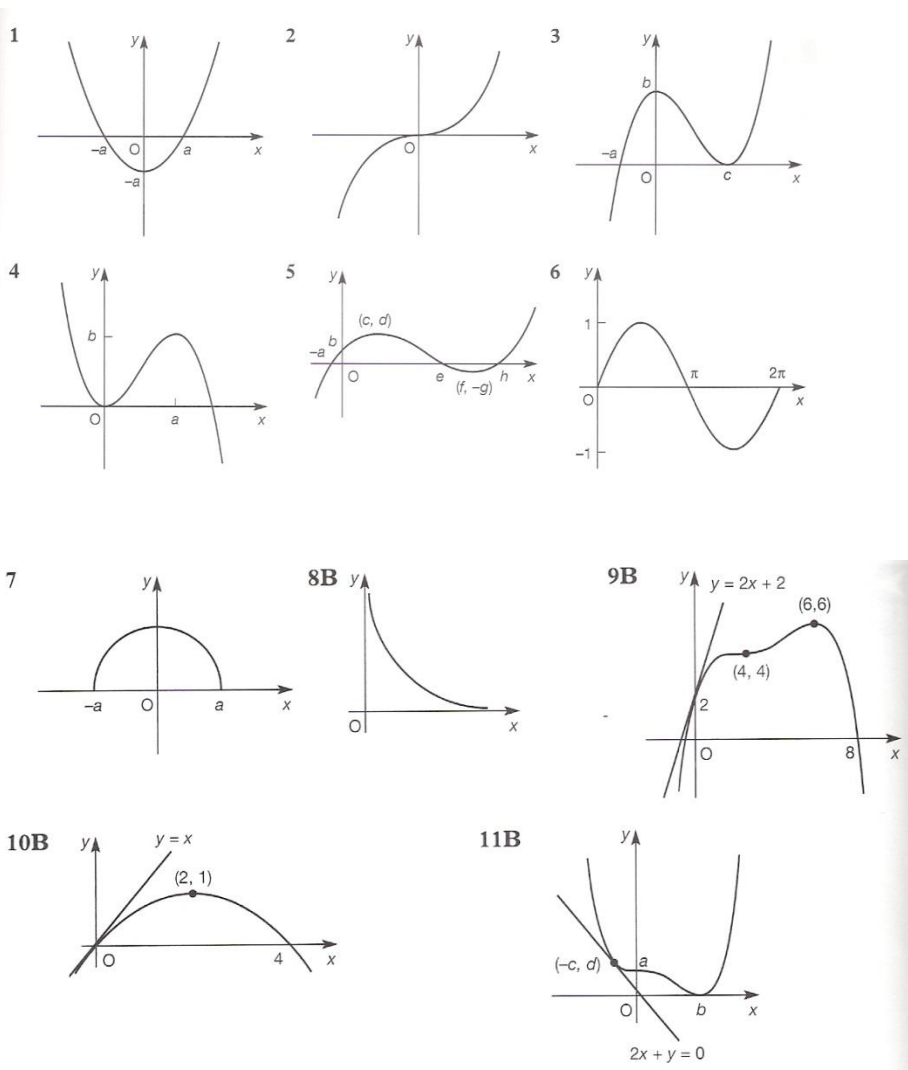
α. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ με $D_f = [1, e^2]$, β. $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, γ. $f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\eta \mu x}$, με $D_f = (0, \frac{\pi}{2})$.

705. Να προσδιορίσετε τις τιμές των a, b ώστε $y = -x + 2$ να είναι ασύμπτωτη της

γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 3}{x - 1}$.

706. Να παραστήσετε γραφικά την $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

707. Να σχεδιάσετε πρόχειρα την γραφική παράσταση των παραγωγισίμων συναρτήσεων που φαίνονται στα σχήματα:



708. Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$2xf(x) + (x^2 + 1)f'(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με $f(0) = 1$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$. (Θέμα εξετάσεων)

β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .

709. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 1}$.

α. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οι αριθμοί $f(x) + 1$ και $f(-x) - 1$ είναι θετικοί και αντίστροφοι.

β. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα και τις ασύμπτωτες και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ. Με την βοήθεια της μελέτης της f να μελετήσετε ομοίως και την συνάρτηση g με $g(x) = \ln f(x)$.

710. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f(1) = \ln(1 + \sqrt{2})$ και $e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

a. Να δείξετε ότι $f(x) = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$,

b. Να δείξετε ότι είναι περιττή,

c. Να βρείτε την $f'(x)$ και την $f''(x)$,

d. Να δείξετε ότι $[f(\sin x)]' = \frac{1}{\sin x}$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

e. Να δείξετε ότι $f'(\sin x) = \sin x$ για κάθε $x \neq \pi + \frac{\pi}{2}$,

f. Να βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

711. Δίνεται η συνάντηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή την πρώτη παράγωγο και $f(x) \neq -2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) - f(x^2) = 4x^3 + 2x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

a. Να βρείτε το $f(1)$ και $f'(1)$,

b. Να δείξετε ότι $f(-1) \neq 0$,

c. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-1, 1)$, τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 5x_0$,

d. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{5x+4}}{x^2 - 1}$,

e. Αν $g(x) = f^3(e^x)$, να βρείτε το $g(0)$ και το $g'(0)$.

712. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάντηση f με $f(x+f(x)) = -x - f(x)$ για κάθε x του $\mathbb{R}$.

A. Να δειχτεί ότι $f(0) = 0$

B. Να δειχτεί ότι $f'(0) = -1$

Γ. Αν $f(2) = -1$ να δειχτεί ότι υπάρχει ξ ώστε $f'(\xi) = 0$.

713. α. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha^x - x$, $x \in \mathbb{R}$ και $0 < \alpha < 1$.

β. Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του c για τις οποίες ισχύει η ισότητα

$$a^{c^2-4} - a^{c-2} = (c^2 - 4) - (c - 2) \text{ όπου } 0 < \alpha < 1. \quad (\text{Θέμα εξετάσεων}).$$

714. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο (a, b) . Αν $0 \notin [a, b]$ και $\beta f(a) - \alpha f(b) = 0$ τότε να δειχτεί ότι

α. Για τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle

β. Υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_0}$ και έπειτα να δειχτεί ότι η

εφαπτόμενη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ διέρχεται από το $(0,0)$.

715. Η συνάρτηση g είναι ορισμένη στο διάστημα $(0, +\infty)$ και ικανοποιεί τις συνθήκες

$$g(1) = 1 \text{ και } g'(x^2) = x^3, \text{ για κάθε } x > 0. \text{ Υπολογίστε το } g(4).$$

716. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f^3(x) + f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση f :

α. Είναι “1-1” και να βρεθεί αντίστροφή της.

β. Είναι

i. συνεχής και παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$

ii. γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και

iii. κυρτή στο $(-\infty, 0]$ και κοίλη στο $[0, +\infty)$

717. α. Να δείξετε ότι η $f(x) = (x^2 - 2x + 3)e^x + \frac{2}{3}x^3 + 2x - 2$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β. Να δείξετε ότι η $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(-1, 0)$.

718. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a \ln x + \frac{\beta}{\ln x}$ ($\alpha, \beta > 0$)

α. αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(\frac{1}{e}, 0)$ να δείξετε ότι το σημείο αυτό είναι σημείο καμπής της f

β. αν επιπλέον $f(e^2) = \frac{3}{2}$ να βρείτε το α και το σύνολο τιμών της f

γ. να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία που έχουν τετμημένες τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ τέμνονται στον άξονα $\psi\psi$.

719. Δίνεται η συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση g τέτοια ώστε $g(x)f'(x) = 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι, αν η C_f έχει σημείο καμπής το $A(x_0, f(x_0))$, τότε η εφαπτομένη της C_g στο $B(x_0, g(x_0))$, είναι παράλληλη στη ευθεία $\psi - 2x + 5 = 0$.

(Θέμα εξετάσεων)

720. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = |x|g(x)$ όπου g συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ να αποδείξετε ότι $g(0) = 0$.

721. Να αποδείξετε ότι το εμβαδά του τριγώνου που ορίζεται από την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f με $f(x) = \frac{1}{x}$ στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$, $x_0 > 0$ και τους θετικούς ημιάξονες είναι σταθερό.

722. α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = \sin(2|x| + \pi)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

β. Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του α για τις οποίες η συνάρτηση f με $f(x) = \sin(2|x| + \alpha)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

723. Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ υποθέτουμε ότι $f(x+y) = f(x)f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

α. $f(0) = 1$

β. Αν η f παραγωγίζεται στο 0 και $f'(0) = 1$ τότε είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και είναι $f'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

- 724.** Να δείξετε ότι α. Για τη συνάρτηση g με $g(x) = (x^2 + 1)(x - 2)^2(x - 3)^3$ υπάρχει $\xi \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0$.
- β. Η εξίσωση $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{2}{x - 2} + \frac{3}{x - 3} = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(2, 3)$.
- 725.** Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[1, 2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ με παράγωγο γνησίως αύξουσα στο $(1, 2)$. Αν $f(1) = f(2) = 0$, να αποδείξετε ότι:
- I.** Υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (1, 2)$ ώστε $f'(\xi) = 0$.
- II.** Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x_0 = \xi$
- III.** Ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, 2)$.
- 726.** Έστω συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο και σύνολο τιμών το $[\alpha, \beta]$ με $\alpha < 0 < \beta$.
- Να αποδείξετε ότι :
- α.** υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία x_1, x_2 με $x_1 \neq x_2$, τέτοια ώστε $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$,
- β.** υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $x_3 \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f''(x_3) = 0$,
- γ.** η εξίσωση $f(x) + f'(x)f''(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.
- 727.** Η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $x \in \mathbb{R}$ και όπου τα α, β, γ είναι πραγματικοί αριθμοί, έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 < x_3$. Να αποδείξετε ότι:
- α.** Υπάρχουν ακριβώς δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία ξ_1, ξ_2 στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.
- β.** Ισχύει $\alpha^2 > 3\beta$
- γ.** Για τα ξ_1, ξ_2 είναι $f''(\xi_1) + f''(\xi_2) = 0$.
- δ.** Η f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής με τετμημένη μεταξύ των ξ_1, ξ_2 .
- 728.** Δίνεται ο θετικός πραγματικός αριθμός α και η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x^2 - 2x \ln x$ με $x \in (0, +\infty)$
- α.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.
- β.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γρ. παρ. της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$ και να προσδιορίσετε το α , ώστε η εφαπτομένη αυτή να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

729. Έστω συνάρτηση $f(x) = x \ln x$, $x > 0$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$

β. Να βρεθεί η εφαπτόμενη της C_f στο $A(1,0)$,

γ. Να αποδειχθεί ότι $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

δ. Αν για τους αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma > 0$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha^x + \beta^x + \gamma^x - 3}{x} = 0$ ναδειχθεί ότι :

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} \geq 3.$$

730. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε $f(1) = 0$ και $xf'(x) - f(x) = x$ για κάθε $x > 0$.

α. Να βρείτε την συνάρτηση f . (τύπο)

β. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

γ. Αν για συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $g'(x)f(x) + g(x) > x$, για κάθε $x > 0$

i. Να αποδείξετε ότι $g(x) > \frac{\ln x}{x-1}$, για κάθε $x \neq 1$

ii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

731. Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία $K(1, f(1))$ και $\Lambda(3, f(3))$ έχουν εξισώσεις $\varepsilon_1: y = 6x - 3$ και $\varepsilon_2: y = 3x - 2$ αντίστοιχα.

α. Να βρείτε τις τιμές $f'(1)$, $f(1)$, $f'(3)$ και $f(3)$.

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 3)$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να τέμνει τον $y' y$ στο 1.

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 4$.

δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 3)$, με $\xi_1 < \xi_2$ ώστε : $\frac{2}{f'(\xi_1)} + \frac{+1}{f'(\xi_2)} = -2$.

732. Δίνεται κυρτή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Η συνάρτηση $g(x) = f(1)x^3 + f(2)x^2 - 2x + 2018$, έχει τοπικά ακρότατα στα $x_1 = -1$, και $x_2 = \frac{1}{3}$.

α. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$, $f(2)$, καθώς και το είδος των ακροτάτων της g .

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $2f(x)f'(x) = 2x - 3$, έχει μια τουλάχιστο λύση

στο $(1, 2)$.

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

δ. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 .

ε. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq f'(2)x - 2f'(2) + 2$ και να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

733. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - f(x)}{x - 1} = 0 \text{ και } 2xf(x) + (x^2 + 1)f'(x) = e^x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α. Να αποδείξετε ότι $f'(1) = 0$.

β. Να βρείτε τον τύπο της f .

γ. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία.

δ. Να λύσετε την ανίσωση $e^x \leq x^2 - 8x + 17$.

ε. Να αποδείξετε ότι : $2e^{\eta \mu x - 1} \leq 2 - \sin^2 x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.