Λόγοι και αναλογίες

Λόγος δύο τιμών α, β **ενός μεγέθους**, **«α προς β»**, (με $\beta \neq 0$) λέγεται ένας αριθμός $\lambda \in R$, για τον οποίο ισχύει **α = λβ.**

Δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta}$ = λ αν και μόνο αν α =λβ.

Ο λόγος $\frac{\alpha}{\beta}$ όταν πρόκειται για ευθ. τμήματα ισούται με το πηλίκο των μέτρων τους.

Αναλογία λέγεται η ισότητα δύο ή περισσότερων λόγων. Πχ $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}$ με $\beta\delta\zeta \neq 0$.

Στην αναλογία $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ οι όροι **α, δ** λέγονται **άκροι** και οι **β, γ μέσοι** όροι.

Όταν οι μέσοι όροι είναι ίσοι λέμε ότι ο β είναι μέσος ανάλογος των α και δ.

Αναλογία της μορφής $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ ***έχουμε*** όταν :

- **I.** Μας δίδεται ή
- **II.** Ισχύει, α και β είναι ανάλογα προς τα γ και δ ή
- **III.** τα μεγέθη α και γ είναι ανάλογα προς τα β και δ ή
- **IV.** όταν τα α και β είναι ανάλογα προς τους αριθμούς γ και δ ή
- **V.** όταν τα α και γ είναι ανάλογα προς τους αριθμού β και δ

Ιδιότητες των αναλογιών

i. Σε μια αναλογία μπορούμε,
α. να αντιστρέψουμε τους όρους της,
β. να εναλλάξουμε την θέση των μέσων ή των άκρων όρων της

Δηλ. είναι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha}=\frac{\delta}{\gamma} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$ με α, β, γ, $\delta \neq 0$

ii. Το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων

Δηλ. $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma$, με β, $\delta \neq 0$.

Όταν β = γ, τότε ο β λέγεται **μέσος ανάλογος** (ή γεωμετρικός μέσος) των α και γ ισχύει $\beta^2 = \alpha\gamma$.

iii. Σε μια αναλογία μπορούμε να προσθέτουμε (ή να αφαιρούμε) τους αριθμητές στους (από τους) παρονομαστές και να προκύπτει πάλι αναλογία.

Δηλ. $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta\pm\alpha}=\frac{\gamma}{\delta\pm\gamma}$ με β, δ, $\beta\pm\alpha$, $\gamma\pm\delta \neq 0$

iv. Αν έχουμε μια αναλογία τότε ο λόγος, του αθροίσματος των αριθμητών προς το άθροισμα των παρονομαστών είναι ίσος με τον αρχικό.

Δηλ. $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}=\frac{\alpha+\gamma+\varepsilon}{\beta+\delta+\zeta}$, με β, δ, ζ, $\beta+\delta+\zeta \neq 0$.

Μεθοδολογικές παρατηρήσεις

1η . Κάθε ζητούμενη αναλογία είναι μια ισότητα (ταυτότητα). Συνεπώς εργαζόμαστε όπως

και για τις ταυτότητες

2η . Όταν μας δίνεται μια αναλογία είναι **χρήσιμο** να εισαγάγουμε μεταβλητή που να

εκφράζει το λόγο και να έχουμε του αριθμητές συναρτήσει των παρονομαστών και του

λόγου.

Παραδείγματα.

1ο . Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$**, τότε** $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{5\alpha-7\gamma}{5\beta-7\delta}$**, όπου** $\beta\delta(5\beta-7\delta)\neq 0$

Απόδειξη

Έστω $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\lambda$ τότε $\begin{cases}\alpha=\lambda\beta\\ \gamma=\lambda\delta\end{cases}$.

Έτσι $\frac{5\alpha-7\gamma}{5\beta-7\delta}=\frac{5\lambda\beta-7\lambda\delta}{5\beta-7\delta}=\frac{\lambda(5\beta-7\delta)}{5\beta-7\delta}=\lambda=\frac{\alpha}{\beta}$

2ο Να βρείτε τους χ και ψ ώστε $\begin{cases}\frac{\chi-1}{3}=\frac{\psi-2}{4}\\ 4\chi+3\psi=8\end{cases}$

Λύση

1ος τρόπος

Έστω $\frac{\chi-1}{3}=\frac{\psi-2}{4}=\lambda$ τότε $\begin{cases}\chi=3\lambda+1\\ \psi=4\lambda+2\end{cases}$ **(1)**.

Έτσι η δεύτερη εξίσωση γίνεται

$$4(3\lambda+1)+3(4\lambda+2)=8 \Leftrightarrow$$
$$12\lambda+4+12\lambda+6=8 \Leftrightarrow$$
$$24\lambda=-2 \Leftrightarrow \lambda=-\frac{1}{12}$$

Επομένως από τις **(1)** έχουμε $\begin{cases}\chi=3(-\frac{1}{12})+1\\ \psi=4(-\frac{1}{12})+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\chi=\frac{3}{4}\\ \psi=\frac{5}{3}\end{cases}$.

2^{ος} τρόπος

$$\begin{cases}\dfrac{\chi-1}{3}=\dfrac{\psi-2}{4}\\ 4\chi+3\psi=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{4\chi-4}{12}=\dfrac{3\psi-6}{12}=\dfrac{4\chi+3\psi-10}{24}\\ 4\chi+3\psi=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{4\chi-4}{12}=\dfrac{3\psi-6}{12}=\dfrac{-2}{24}\\ 4\chi+3\psi=8\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{4\chi-4}{12}=\dfrac{-1}{12}\\ \dfrac{3\psi-6}{12}=\dfrac{-1}{12}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x-4=-1\\ 3\psi-6=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\chi=\dfrac{3}{4}\\ \psi=\dfrac{5}{3}\end{cases}.$$

3^{ο} Ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ έχει μήκος 18 cm. Ένα σημείο Μ εσωτερικά του ΑΒ το διαιρεί σε δύο μέρη ΑΜ και ΜΒ ανάλογα του 2 και του 7, αντίστοιχα. Να βρείτε τα μήκη των ΑΜ και ΜΒ

Λύση

Είναι $\dfrac{AM}{2}=\dfrac{MB}{7}\overset{\text{ιιι ιδιοτητα}}{=}\dfrac{AM+MB}{2+7}=\dfrac{AB}{9}=\dfrac{18}{9}=2.$

Έτσι ΑΜ = 4 cm και ΜΒ = 14cm.

4^{ο}. Τέσσερις; ημιευθείες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ σχηματίζουν τις διαδοχικές γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$ και $\Delta\hat{O}A$, που έχουν μέτρα ανάλογα προς τους αριθμούς 1, 2, 3, 4. Να υπολογίσετε τις γωνίες αυτές.

(άσκηση 3Αποδ.ασκ. /σελ. 28 βιβ. Γεωμετρίας)

Λύση

Επειδή οι γωνίες είναι διαδοχικές έχουμε $A\hat{O}B+B\hat{O}\Gamma+\Gamma\hat{O}\Delta+\Delta\hat{O}A=360^{o}$.(**1**)

Επίσης $\dfrac{A\hat{O}B}{1}=\dfrac{B\hat{O}\Gamma}{2}=\dfrac{\Gamma\hat{O}\Delta}{3}=\dfrac{\Delta\hat{O}A}{4}=\lambda$, όπου λ θετικός.

Τότε $A\hat{O}B=\lambda$, $B\hat{O}\Gamma=2\lambda$, $\Gamma\hat{O}\Delta=3\lambda$ και $\Delta\hat{O}A=4\lambda$, οπότε από την (**1**) έχουμε

$\lambda+2\lambda+3\lambda+4\lambda=360 \Leftrightarrow 10\lambda=360 \Leftrightarrow \lambda=36$.

Έτσι είναι $A\hat{O}B=36^{o}$, $B\hat{O}\Gamma=72^{o}$, $\Gamma\hat{O}\Delta=108^{o}$ και $\Delta\hat{O}A=144^{o}$.