

Θεωρία με ερωτήσεις και απαντήσεις

1. Τι είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης;

Κάθε συνάρτηση f έχει ένα π.ο. A και ένα τύπο $y = f(x)$ με $x \in A$.

Τα ζεύγη $(x, f(x))$, σε ένα σύστημα αξόνων καθορίζουν μία γραμμή.

Αυτή λέγεται **γραφική παράσταση** της συνάρτησης και συνήθως την συμβολίζουμε με C_f .

2. Τι μας δείχνει μια γραφική παράσταση;

Σε ένα διάγραμμα μπορούμε να προσδιορίσουμε τα παρακάτω στοιχεία για την συνάρτηση:

- α. το π.ο. και το σύνολο τιμών δηλ. τις τιμές που μπορεί να πάρουν οι μεταβλητές x , y της σχέσης $y = f(x)$ (εντοπίζονται προβάλλοντας την C_f στον $x'x$ και $y'y$, αντίστοιχα για το A και το $f(A)$)
- β. τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης
- γ. τα ακρότατα της συνάρτησης μέγιστα και ελάχιστα (τοπικά και ολικά)
- δ. συμμετρίες (άρτια ή περιττή συνάρτηση κ.ά.)
- ε. χαρακτηριστικά σημεία της C_f και κατά συνέπεια για την συνάρτηση (π.χ. σημεία μηδενισμού, τομές με άξονες ή με άλλες γραμμές κλπ) επίσης και άλλες πληροφορίες που θα δούμε σε επόμενη τάξη.

3. Πως ελέγχουμε τα σημεία τομής μιας γρ. παράστασης με τους άξονες;

A. Με τον $y'y$.

Εάν το 0 ανήκει στο π.ο. τότε το διάγραμμα της συνάρτησης τέμνει τον $y'y$ όπως-δήποτε στο σημείο με $y = f(0)$. **Αν το 0 δεν ανήκει στο π.ο. τότε η γραμμή δεν τέμνει τον $y'y$.**

B. Με τον $x'x$

Επιλύουμε την εξίσωση $f(x) = 0$ και βρίσκουμε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραμμής με τον $x'x$ (πρόκειται για τα λεγόμενα σημεία μηδενισμού της συνάρτησης)

4. Πως ελέγχουμε την θέση μια γραμμής ως προς τον $x'x$;

Λύνουμε την ανίσωση $f(x) > 0$ αν ζητάμε τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι πάνω από τον $x'x$, και

την $f(x) < 0$ αν ζητάμε αυτά που είναι κάτω από τον $x'x$.

(Δηλ. μελετάμε το πρόσημο της $f(x)$)

5. Πως ελέγχουμε την θέση δύο γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$;

A. Τα κοινά σημεία τους

Βρίσκουμε τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ με το x να ανήκει στα κοινά σημεία των δύο π.ο. των συναρτήσεων ($x \in A \cap B$). Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων

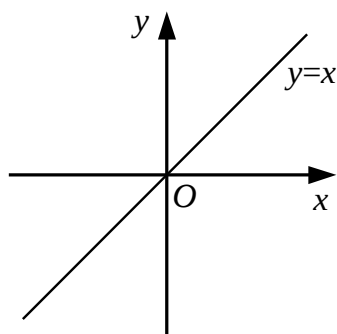
B. Για την θέση της μια ως προς την άλλη

Μελετάμε το πρόσημο της διαφοράς $f(x) - g(x)$ στο κοινό μέρος των δύο πεδ. ορισμού τους ($x \in A \cap B$) και όταν είναι θετικό τότε η C_f είναι πάνω από την C_g

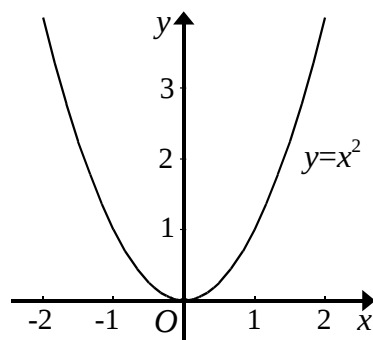
ενώ όταν είναι αρνητικό τότε η Cf είναι κάτω από την Cg
(όταν είναι 0 τότε έχουμε τις τετμημένες των σημείων τομής)

6. Ποιες είναι οι βασικές γραφικές παραστάσεις;

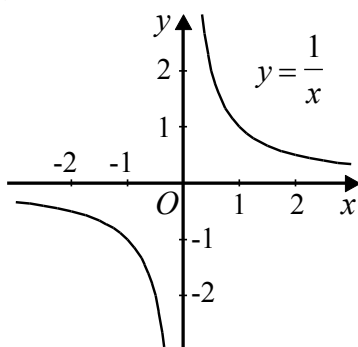
Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις ορισμένων βασικών συναρτήσεων



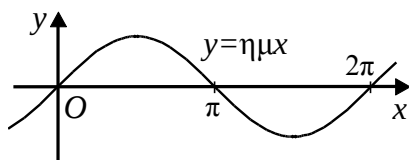
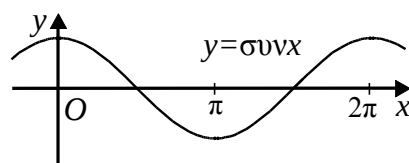
(α) Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι η διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.



(β) Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι μια παραβολή.



(γ) Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι μια υπερβολή.



(στ) Οι συναρτήσεις $f(x) = \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π .

Παρατηρούμε ότι στη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{x}$ υπάρχει μια «διακοπή» στο σημείο $x=0$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το πεδίο ορισμού της f δεν περιέχει το μηδέν.

7. Πως σχεδιάζουμε μια γραφική παράσταση πρόχειρα;

Με βάση τον παραπάνω πίνακα και τις παρακάτω παρατηρήσεις

α. Ο τύπος $\psi = \alpha x + \beta$ είναι μια ευθεία που τέμνει τον $y'y$ στο σημείο με $y = \beta$ και σχηματίζει γωνία φ τέτοια ώστε $\epsilon\varphi\varphi = \alpha$.

β. Ο τύπος $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι μια παραβολή με κορυφή το σημείο με $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ και η οποία τέμνει τον $y'y$ στο σημείο με $y = \gamma$.
(τον $x'x$ τον τέμνει ή όχι ανάλογα με την διακρίνουσα)

γ. Αν η συνάρτηση είναι με πολλαπλό τύπο τότε σχεδιάζουμε κάθε τύπο ξεχωριστά.

δ. Αν γνωρίζουμε την γραφική παράσταση μιας $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ τότε

Γραφική παράσταση συνάρτησης

- δ₁.** Η γραφική παράσταση της $-f$ είναι η συμμετρική της C_f ως προς τον $x'x$.
δ₂. Η γραφική παράσταση της $g(x) = f(x)+c$ είναι η γραμμή που προκύπτει όταν «μετατοπίσουμε» C_f κατακόρυφα κατά c ($c \neq 0$).
δ₃. Η γραφική παράσταση της $g(x) = f(x-c)$ όπου $c \neq 0$ είναι η γραμμή που προκύπτει όταν «μετατοπίσουμε» οριζόντια την C_f κατά c .

Βασικές ισοδυναμίες

Όπως προκύπτει από όσα παραπάνω αναφέρθηκαν έχουμε

- I.** Ένα σημείο $A(x_0, y_0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$
ή
Η γραφική παράσταση της $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ $\Leftrightarrow f(x_0) = y_0$
- II.** Η γραφική παράσταση της $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ τέμνει τον $x'x \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \Delta \\ \text{και} \\ f(x) = 0 \end{cases}$
- III.** Η γραφική παράσταση της $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ είναι πάνω από τον $x'x \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \Delta \\ \text{και} \\ f(x) > 0 \end{cases}$
(για θέση κάτω από τον $x'x$ επιλύουμε την $f(x) < 0$, στο Δ)
- IV.** Για την θέση δύο γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων