

Γενικά.

Κάθε εξίσωση με δύο μεταβλητές (συνήθως x, y), που επαληθεύεται από τις συντεταγμένες των σημείων μιας γραμμής (του επιπέδου), λέγεται **εξίσωση γραμμής**.

Μια τέτοια εξίσωση βρίσκεται κάθε φορά που αναζητάμε γεωμετρικό τόπο σημείων ενός επιπέδου στο οποίο έχουμε ορίσει ένα σύστημα αναφοράς Oxy , ή γνωρίζοντας το είδος της γραμμής προσδιορίζουμε την σχέση των συντεταγμένων των σημείων της.

Στην πρώτη περίπτωση η αρχική συνθήκη (που καθορίζει την ιδιότητα των σημείων) μετασχηματίζεται σε μια εξίσωση της παραπάνω μορφής.

Σχόλιο

Ο τύπος μιας συνάρτησης είναι εξίσωση γραμμής , της γραφικής της παράστασής της .

Κάθε εξίσωση γραμμής, που επιλυόμενη ως προς y , έχει μόνο μία λύση για κάθε x που έχει νόημα , καθορίζει τύπο συνάρτησης , (καθορίζει μια συνάρτηση) που έχει γραφική παράσταση, την γραμμή.

(Κάθε τύπος συνάρτησης είναι εξίσωση γραμμής ενώ κάθε εξίσωση γραμμής δεν είναι σχέση συνάρτησης.)

A. Πως προσδιορίζουμε τις εξισώσεις των γραμμών.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι.

1. Μετασχηματίζοντας την διανυσματική σχέση που ισχύει για ένα τυχαίο σημείο της $M(x, y)$. (Αν δεν υπάρχει σύστημα αναφοράς, επιλέγουμε ένα αυθαίρετα).

πχ. Να βρεθεί ο γ. τ. των σημείων M του επιπέδου δύο δεδομένων

σημείων O, A , με $(OA)=3$ για τα οποία ισχύει $\vec{OM}(\vec{OM}-2\vec{OA})=7$.

Απάντηση

Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς με αρχή το O και οριζόντιο θετικό ημιάξονα την ημιευθεία OA .

Τότε είναι $O(0,0)$, $A(3, 0)$.

Έτσι για το τυχαίο σημείο $M(\chi, \psi)$ του ζητούμενου τόπου θα έχουμε:

$$\vec{OM} = (\chi, \psi), \quad \vec{OA} = (3, 0) \text{ και } \vec{OM} - 2\vec{OA} = (\chi, \psi) - 2(3, 0) = (\chi - 6, \psi).$$

$$\text{Επομένως} \quad \vec{OM}(\vec{OM} - 2\vec{OA}) = 7 \Leftrightarrow$$

$$(\chi, \psi)(\chi - 6, \psi) = 7 \Leftrightarrow$$

$$\chi(\chi - 6) + \psi^2 = 7$$

$$\Leftrightarrow \chi^2 - 6\chi + 9 + \psi^2 = 7 + 9$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(\chi - 3)^2 + \psi^2 = 4^2}. \text{ (Η οποία είναι εξίσωση κύκλου)}$$

2. Γνωρίζοντας ότι η γραμμή είναι συγκεκριμένη με γνωστά στοιχεία και την εξίσωση της από την θεωρία

πχ. Να βρεθεί η ευθεία που σχηματίζει γωνία 45° με τον $\chi' \chi$ και τέμνει τον $\psi' \psi$ στο σημείο $A(0, 3)$.

Απάντηση

Η ευθεία έχει κλίση $\lambda = \tan 45^\circ = 1$ και έτσι η εξίσωση είναι $\psi = 1\chi + 3$ δηλ $\chi - \psi + 3 = 0$.

3. Όταν γνωρίζουμε ότι οι συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου $M(\chi, \psi)$ δίνονται από εξίσωση της μορφής

$$\chi = \chi(\lambda)$$

$$\psi = \psi(\lambda), \text{ όπου } \lambda \text{ πραγματικός αριθμός.}$$

Τότε απαλείφουμε την παράμετρο λ (ή τις παραμέτρους) ώστε να προκύψει εξίσωση γραμμής (να περιέχει δηλαδή τα χ, ψ συντεταγμένες του σημείου M)

πχ. Να προσδιοριστεί η γραμμή στην οποία ανήκουν τα σημεία $M(\chi, \psi)$ για τα οποία ισχύουν $\chi = 4\sin\lambda$ και $\psi = 3\eta\mu\lambda$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Απάντηση

Έχουμε $\sin\lambda = \frac{\chi}{4}$, $\eta\mu\lambda = \frac{\psi}{3}$ και $\sin^2\lambda + \eta\mu^2\lambda = 1$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\text{Επομένως } \boxed{\frac{\chi^2}{16} + \frac{\psi^2}{9} = 1}. \text{ (πρόκειται για εξίσωση έλλειψης)}$$

Παραδείγματα.

- 1^ο Σε επίπεδο Οχψ δίνονται τα σημεία A(1,2) και B(-1, 3). Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου που ικανοποιούν την συνθήκη $(\vec{MA} + 2\vec{MB})(\vec{MA} - 2\vec{MB}) = 2$.

Λύση

Η δεδομένη σχέση ισοδυναμεί με την $\vec{MA}^2 - 4\vec{MB}^2 = 2$. (1)

Θεωρώντας M(χ,ψ) ένα τυχαίο σημείο του ζητούμενου τόπου, έχουμε

$\vec{MA} = (\chi - 1, \psi - 2)$ και $\vec{MB} = (\chi + 1, \psi - 3)$ και η (1) γίνεται

$$(\chi - 1)^2 + (\psi - 2)^2 - 4(\chi + 1)^2 - 4(\psi - 3)^2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\chi^2 - 2\chi + 1 + \psi^2 - 4\psi + 4 - 4\chi^2 - 8\chi - 4 - 4\psi^2 + 24\psi - 36 = 2 \Leftrightarrow$$

$$-3\chi^2 - 3\psi^2 - 10\chi + 20\psi - 34 = 0 \Leftrightarrow 3\chi^2 + 3\psi^2 + 10\chi - 20\psi + 34 = 0$$

Αυτή η τελευταία εξίσωση, όπως θα δούμε στα «μελλούμενα» είναι εξίσωση ενός κύκλου.

- 2^ο Δίνονται τα σημεία A,B με $(AB) = 5$. Να βρείτε τον γεωμ. τόπο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $3\vec{MA} \cdot \vec{AB} + 2\vec{MB} \cdot \vec{AB} = 0$.

Λύση

Θεωρούμε σύστημα αξόνων Αχψ με τον θετικό ημιάξονα Αχ να συμπίπτει με την ημιευθεία ΑΒ.

Τότε είναι A(0,0) , B(5,0) και $\vec{AB} = (5,0)$.

Αν M(χ,ψ) τυχαίο σημείο του τόπου τότε $\vec{AM} = (\chi, \psi)$ και $\vec{BM} = (\chi - 5, \psi)$ και η ζητούμενη σχέση γίνεται:

$$3(-\chi, -\psi)(5,0) + 2(5-\chi, -\psi)(5,0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$3(-5\chi + 0) + 2(25 - 5\chi) = 0 \Leftrightarrow$$

$-25\chi + 50 = 0 \Leftrightarrow \chi = 2$, εξίσωση γραμμής που όπως θα δούμε είναι εξίσωση ευθείας.

B. Σημεία σε γραμμές.

α. Ένα σημείο $A(\chi_0, \psi_0)$ βρίσκεται σε μια γραμμή με εξίσωση $C(\chi, \psi) = 0$ αν και μόνο αν Οι συντεταγμένες χ_0, ψ_0 επαληθεύουν την εξίσωση $C(\chi, \psi) = 0$.

πχ. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το σημείο $A(-1, 1)$ ανήκει στην γραμμή

$$C : \chi^2 + (\lambda^2 - 2\lambda)\psi - 4 = 0.$$

Λύση

Το A ανήκει στην γραμμή C αν και μόνο αν

$$(-1)^2 + (\lambda^2 - 2\lambda)(1) - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3 \text{ ή } \lambda = -1.$$

β. Μια γραμμή με ακέραια πολωνυμική εξίσωση, περνά από την αρχή των αξόνων αν και μόνο αν η εξίσωση της δεν περιέχει σταθερό όρο.

πχ. Η γραμμή με εξίσωση $C: \chi^2 + \psi^2 + 4\chi - 2\psi = 0$ περνά από την αρχή των αξόνων γιατί για $\chi = \psi = 0$ είναι : $0^2 + 0^2 + 4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0$ δηλ οι συντ/νες του $O(0,0)$ επαληθεύουν την εξίσωσή της.

Γ. Συμμετρίες μιας γραμμής

α. Ως προς $\chi'\chi$.

Η γραμμή, που η εξίσωσή της παραμένει αμετάβλητη όταν αντικαταστήσουμε το ψ με $-\psi$, έχει άξονα συμμετρίας τον $\chi'\chi$.

π.χ. Η γραμμή $C : (\chi-2)^2 + \psi^2 = 9$. Εάν θέσουμε όπου ψ το $-\psi$ τότε έχουμε :

$(\chi-2)^2 + (-\psi)^2 = 9 \Leftrightarrow (\chi-2)^2 + \psi^2 = 9$, που είναι η αρχική εξίσωση. Αυτό αποδεικνύει ότι η C έχει άξονα συμμετρίας τον $\chi'\chi$.

β. Ως προς $\psi'\psi$

Η γραμμή, που η εξίσωσή της παραμένει αμετάβλητη όταν αντικαταστήσουμε το x με $-x$, έχει άξονα συμμετρίας τον $\psi'\psi$.

Π.χ. Η $C : \chi^2 - \psi - 5 = 0$ έχει άξονα συμμετρίας τον $\psi'\psi$ γιατί αν θέσουμε όπου χ το $-\chi$ έχουμε $(-\chi)^2 - \psi - 5 = 0 \Leftrightarrow \chi^2 - \psi - 5 = 0$ που είναι η αρχική.

γ. Ως προς την αρχή του συστήματος $O(0,0)$.

Η γραμμή, που η εξίσωσή της παραμένει αμετάβλητη όταν αντικαταστήσουμε το x με $-x$ και το ψ με το $-\psi$, έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

π.χ. Οι γραμμές $C_1: \chi^2 + \psi^2 = 1$ και $C_2: \chi\psi - 2 = 0$ $C_3: \chi^2 - \frac{\psi^2}{4} = 1$ είναι εξισώσεις γραμμών

με κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.

δ. Ως προς την διχοτόμο της Ιης και ΙΙης γωνίας των αξόνων.

Η γραμμή, που η εξίσωσή της παραμένει αμετάβλητη όταν αντικαταστήσουμε το x με ψ και το ψ με το x , έχει άξονα συμμετρίας την διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων.

Π.χ. Οι γραμμές με εξισώσεις $\chi - \psi = 0$, $(\chi - 1)^2 + (\psi - 1)^2 = 16$, $\chi\psi + \chi + \psi = 1$,

$\psi = \frac{x+1}{x-1}$, έχουν συμμετρία ως προς την διχοτόμο της Ιης και ΙΙης γωνίας των αξόνων.

Σημείωση .

Όταν, επιφέροντας τις παραπάνω αντικαταστάσεις σε μια εξίσωση γραμμής προκύπτουν νέες εξισώσεις, αυτές είναι οι εξισώσεις των γραμμών που είναι αντίστοιχα συμμετρικές της αρχικής γραμμής.

πχ. Η γραμμή C με εξίσωση $2\chi^2 + 2\psi = 5$ είναι συμμετρική της $C': 2\chi^2 - 2\psi = 5$ ως προς τον $\chi'\chi$, ενώ η $C_1: 2\psi^2 + 2\chi = 5$ είναι η συμμετρική της C ως προς την διχοτόμο της Ιης και ΙΙης γωνίας των αξόνων ($\psi = \chi$).

Μεθοδολογική παρατήρηση

Για να ελέγχουμε μια γραμμή ως προς τους άξονες συμμετρίας της θα επιφέρουμε τους παραπάνω μετασχηματισμούς και θα συμπεραίνουμε για την συμμετρία από την τελική μορφή της εξίσωσης.

Παράδειγμα.

Να βρείτε αν οι παρακάτω γραμμές είναι συμμετρικές ως προς

- i. τους άξονες του συστήματος αναφοράς**
- ii. την διχοτόμο της Ιης γωνίας των αξόνων,**
- iii. την αρχή των αξόνων.**

α. $C_1: 2\chi\psi - 3\psi - 3\chi - 1 = 0$, **β.** $C_2: \psi - 2 - \frac{4}{\chi^2 - 4} = 0$, **γ.** $C_3: \psi = \chi^2 - 1$,

δ. $C_4: \psi\chi - \eta\mu\psi = 0$, **ε.** $C_5: \chi + \psi = 0$, **στ.** $C_6: \psi = \chi^2 + \frac{1}{\chi^2}$,

ζ. $C_7: \chi^2 + \chi\psi - \psi^2 - 1 = 0$.

Λύση.

α. Θέτουμε στην εξίσωση όπου χ το ψ και όπου ψ το χ και έτσι γίνεται

$2\psi\chi - 3\chi - 3\psi - 1 = 0$, που είναι η αρχική. Άρα η γραμμή C_1 έχει άξονα συμμετρίας την

διχοτόμο της Ιης γωνίας των αξόνων.

β. Θέτοντας όπου χ το $-\chi$ έχουμε :

$$\psi - 2 - \frac{4}{(-\chi)^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow \psi - 2 - \frac{4}{\chi^2 - 4} = 0.$$

Άρα η C_2 έχει άξονα συμμετρίας τον $\psi'\psi$.

γ. Θέτοντας όπου χ το $-\chi$ έχουμε : $\psi = (-\chi)^2 - 1 \Leftrightarrow \psi = \chi^2 - 1$.

Άρα η C_3 έχει άξονα συμμετρίας τον $\psi'\psi$.

δ. Θέτοντας όπου ψ το $-\psi$ έχουμε:

$$(-\psi)\chi - \eta\mu(-\psi) = 0 \Leftrightarrow -\chi\psi + \eta\mu\psi = 0 \Leftrightarrow \chi\psi - \eta\mu\psi = 0.$$

Άρα η C_4 έχει άξονα συμμετρίας τον $\chi'\chi$.

ε. Θέτοντας όπου χ, ψ τα $-\chi$ και $-\psi$ αντίστοιχα έχουμε:

$$-\chi - \psi = 0 \Leftrightarrow \chi + \psi = 0.$$

Άρα η C_5 είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.

Επίσης εναλλάσσοντας τα χ, ψ έχουμε $\psi + \chi = 0$ άρα η C_5 είναι συμμετρική και ως προς την διχοτόμο της Ιης και ΙΙης γωνίας των αξόνων.

στ. Θέτοντας όπου χ το $-\chi$ έχουμε :

$$\psi = (-\chi)^2 + \frac{1}{(-\chi)^2} \Leftrightarrow \psi = \chi^2 + \frac{1}{\chi^2}. \text{ Άρα η } C_6 \text{ είναι συμμετρική ως προς τον } \psi'\psi.$$

ζ. Θέτοντας όπου χ, ψ τα $-\chi$ και $-\psi$ αντίστοιχα έχουμε:

$$(-\chi)^2 + (-\chi)(-\psi) - (-\psi)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \chi^2 + \chi\psi - \psi^2 - 1 = 0. \text{ Άρα η } C_7 \text{ είναι συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων.}$$

A. Κοινά σημεία δύο γραμμών – Τομές με τους άξονες

Ι. Τα κοινά σημεία δύο γραμμών βρίσκονται επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεών τους.

Ειδικά όταν πρόκειται για τύπους συναρτήσεων, τότε εξισώνουμε τους τύπους τους και βρίσκουμε τις τετμημένες (θέσεις) των κοινών σημείων.

Παραδείγματα

1ο.: Δίνονται οι γραμμές $C_1 : \chi^2 + \psi^2 - 2\chi + 3\psi = 8$ και $C_2 : \chi + \psi = 1$. Να βρείτε τα κοινά σημεία τους αν υπάρχουν.

Λύση.

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε το σύστημα : } \begin{cases} \chi^2 + \psi^2 - 2\chi + 3\psi = 8 \\ \chi + \psi = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \chi^2 + \psi^2 - 2\chi + 3\psi = 8 \\ \psi = 1 - \chi \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} \chi^2 + (1-\chi)^2 - 2\chi + 3(1-\chi) = 8 \\ \psi = 1 - \chi \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \chi^2 + 1 - 2\chi + \chi^2 - 2\chi + 3 - 3\chi = 8 \\ \psi = 1 - \chi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\chi^2 - 7\chi - 4 = 0 \\ \psi = 1 - \chi \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} \chi = 4 \\ \psi = -3 \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} \chi = -\frac{1}{2} \\ \psi = \frac{3}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Άρα οι γραμμές τέμνονται στα σημεία A(4,-3) και B $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

II. Κοινά σημεία με άξονες

α. Τομές μιας γραμμής $C(\chi, \psi) = 0$ (I) με τον άξονα $\chi'\chi$.

Επειδή στον $\chi'\chi$ έχουμε σημεία της μορφής $(\chi_0, 0)$ με $\chi_0 \in \mathbb{R}$ για να βρίσκουμε τα σημεία τομής μιας γραμμής με τον $\chi'\chi$ (**οριζόντιο άξονα**) θα επιλύουμε την εξίσωση που προκύπτει όταν στην (I) **θέσουμε $\psi = 0$** . Οι ρίζες της προκύπτουσας εξίσωσης είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της C με τον $\chi'\chi$.

β. Τομές μιας γραμμής $C(\chi, \psi) = 0$ (I) με τον άξονα $\psi'\psi$.

Επειδή στον $\psi'\psi$ έχουμε σημεία της μορφής $(0, \psi_0)$ με $\psi_0 \in \mathbb{R}$ για να βρίσκουμε τα σημεία τομής μιας γραμμής με τον $\psi'\psi$ (**κατακόρυφο άξονα**) θα επιλύουμε την εξίσωση που προκύπτει όταν στην (I) **θέσουμε $\chi = 0$** . Οι ρίζες της προκύπτουσας εξίσωσης είναι οι τεταγμένες των σημείων τομής της C με τον $\psi'\psi$.

πχ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραμμής $C : (\chi-2)^2 + (\psi+1)^2 = 5$ με του άξονες.

Τον $\chi'\chi$:

Για $\psi = 0$ έχουμε $(\chi-2)^2 + (0+1)^2 = 5 \Leftrightarrow |\chi-2| = 2 \Leftrightarrow \chi-2 = 2$ ή $\chi-2 = -2 \Leftrightarrow \chi = 4$ ή $\chi = 0$
δηλ. τέμνει τον $\chi'\chi$ στα σημεία A(4, 0) και O(0,0)

Τον $\psi'\psi$

Για $\chi = 0$ έχουμε $(0-2)^2 + (\psi+1)^2 = 5 \Leftrightarrow |\psi+1| = 1 \Leftrightarrow \psi+1 = 1$ ή $\psi+1 = -1 \Leftrightarrow \psi = 0$ ή $\psi = -2$
δηλ. τέμνει τον $\psi'\psi$ στα σημεία O(0,0) και B(0, -2).

E. Γραμμές που διέρχονται από σταθερό (ή σταθερά σημεία)

Υπάρχουν εξισώσεις που οι συντελεστές τους είναι παράμετροι που παίρνουν διάφορες πραγματικές τιμές. Τέτοιες εξισώσεις λέγονται **παραμετρικές εξισώσεις** γραμμών και τότε λέμε ότι έχουμε **οικογένεια καμπυλών**.

$$\Pi_{\chi} \quad (2\alpha^2 + \alpha + 3)\chi + (\alpha^2 - \alpha + 1)\psi + (3\alpha + 1) = 0 \text{ με } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\chi^2 + \psi^2 - 2\lambda\chi + 1 = 0 \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}$$

Όταν ζητείται να δείξουμε ότι διέρχονται από σταθερό σημείο θα εργαζόμαστε με έναν από τους δύο τρόπους.

1^{ος} τρόπος. Θα παίρνουμε δύο «βολικές» τιμές για την παράμετρο και θα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτουν ώστε να βρίσκουμε κοινά σημεία τους.

Κατόπιν θα αποδεικνύουμε ότι τα κοινά σημεία επαληθεύουν την αρχική παραμετρική εξίσωση για κάθε τιμή της παραμέτρου.

Παράδειγμα.

Να δείξετε ότι η εξίσωση (ευθείας) $(2\alpha^2 + \alpha + 3)\chi + (\alpha^2 - \alpha + 1)\psi + (3\alpha + 1) = 0$ με $\alpha \in \mathbb{R}$ παριστάνει γραμμές που διέρχονται από σταθερό σημείο, το οποίο και να προσδιορίσετε.

Λύση

Για $\alpha = 1$ έχουμε την εξίσωση $6\chi + \psi = -4$

Για $\alpha = 0$ έχουμε την εξίσωση $3\chi + \psi = -1$.

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων έχουμε λύση το σημείο $K(-1, 2)$.

$$(2\alpha^2 + \alpha + 3)(-1) + (\alpha^2 - \alpha + 1)(2) + (3\alpha + 1) = -2\alpha^2 - \alpha - 3 + 2\alpha^2 - 2\alpha + 2 + 3\alpha + 1 = 0 \text{ για κάθε } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Άρα οι γραμμές της εξίσωσης διέρχονται από το σημείο $K(-1, 2)$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

2^{ος} τρόπος

Θα μετασχηματίζουμε την εξίσωση σε πολυώνυμο της παραμέτρου που για κάθε τιμή της θα είναι ίσο με το 0. Επομένως κάθε συντελεστής του θα είναι ίσος με 0. (θεωρία πολωνύμων)
Από το σύστημα αυτό θα προκύπτει το ή τα σταθερά σημεία.

Παράδειγμα

Να δείξετε ότι η εξίσωση (ευθείας) $(2\alpha^2 + \alpha + 3)\chi + (\alpha^2 - \alpha + 1)\psi + (3\alpha + 1) = 0$ (1) με $\alpha \in \mathbb{R}$ παριστάνει γραμμές που διέρχονται από σταθερό σημείο, το οποίο και να προσδιορίσετε.

Λύση

Η εξίσωση για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ γίνεται

$$2\alpha^2\chi + \alpha\chi + 3\chi + \alpha^2\psi - \alpha\psi + \psi + 3\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow (2\chi + \psi)\alpha^2 + (\chi - \psi + 3)\alpha + 3\chi + \psi + 1 = 0$$

Επομένως πρέπει

$$\begin{cases} 2\chi + \psi = 0 \\ \chi - \psi + 3 = 0 \\ 3\chi + \psi + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi = -2\chi \\ \chi + 2\chi + 3 = 0 \\ 3\chi - 2\chi + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = -1 \\ \psi = 2 \end{cases}.$$

Επομένως το κοινό σημείο για όλες τις γραμμές που παριστάνει η (1) είναι το $K(-1, 2)$.

Ασκήσεις

1. Δίνεται μια γραμμή C με εξίσωση $\beta x + \gamma y - \alpha = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Αν η C διέρχεται από το σημείο $M(\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha})$, να δείξετε ότι το τρίγωνο με πλευρές α, β, γ είναι ορθογώνιο.
2. Να βρείτε ποιες από τις γραμμές που έχουν τις παρακάτω εξισώσεις διέρχονται από την αρχή των αξόνων.
 $\alpha. 3x - 5y = 0$ $\beta. x^2 + y^2 - 2x + 5y = 0$
 $\gamma. x^2 + y^2 - 3x + 1 = 0$
3. Να βρείτε το λ ώστε οι γραμμές που έχουν τις παρακάτω εξισώσεις να διέρχονται από την αρχή των αξόνων.
 $\alpha. 3x - \lambda y + \lambda - 2 = 0$ $\beta. (x-1)^2 + y^2 - \lambda^2 - 1 = 0$
4. Έστω η γραμμή C με εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0$ (1)
 $\alpha.$ Να εξετάσετε αν τα σημεία $A(1, \sqrt{2}), B(-1, 2)$ ανήκουν στη γραμμή C
 $\beta.$ Να βρείτε το λ ώστε το σημείο $M(2, \lambda + 1)$ να ανήκει στη γραμμή C .
5. Έστω η γραμμή $C: x^2 + y^2 - 2x + \kappa^2 - 1 = 0$. Να βρείτε τα κ, θ ώστε η γραμμή C να διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(\eta\mu\theta, \sigma\upsilon\nu\theta), 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.
6. Θεωρούμε τις γραμμές $\epsilon: ax + by + \gamma = 0, \epsilon_1: ax - by + \gamma = 0, \epsilon_2: ax - by - \gamma = 0$ και $\epsilon_3: ax + by - \gamma = 0$ ($\alpha, \beta, \gamma \neq 0$). Να αποδείξετε ότι:
 $\alpha)$ η ϵ_1 είναι συμμετρική της ϵ ως προς άξονα συμμετρίας τον x'
 $\beta)$ η ϵ_2 είναι συμμετρική της ϵ ως προς άξονα συμμετρίας τον y'
 $\gamma)$ η ϵ_3 είναι συμμετρική της ϵ ως προς κέντρο συμμετρίας την αρχή O των αξόνων.
7. Δίνονται οι τρεις γραμμές $C_1: x^2 - y^2 + 2y - 1 = 0, C_2: 2x^2 - y^2 - 4x + 4 = 0$ και $C_3: x^2 + y^2 = 1$.
Να αποδείξετε ότι :
 $\iota.$ Η C_1 έχει άξονα συμμετρίας τον $\psi'\psi$,
 $\iota\iota.$ Η C_2 έχει άξονα συμμετρίας τον $\chi'\chi$.

- iii.** Η C_3 έχει άξονες συμμετρίας τους άξονες του συστήματος αναφοράς και κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.
- 8.** Δίνεται η γραμμή C με εξίσωση: $\chi^2 + \psi^2 - 2\chi - 2\psi + 1 = 0$.
- i.** Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής που είναι συμμετρική ως προς :
- α.** τον $\chi'\chi$, και **β.** τον $\psi'\psi$.
- ii.** Να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες αν υπάρχουν.
- 9.** Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω γραμμές έχουν άξονα συμμετρίας τον $\chi'\chi$, τον $\gamma'\gamma$ και ποιες κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.
- α.** $C_1: \chi + \psi^2 - 1 = 0$ **β.** $C_2: 2\chi^2 + \psi^2 - 5 = 0$.
- 10.** Έστω η γραμμή $C: \chi^2 + \psi^2 - 3\chi + 2\psi - 10 = 0$.
Να βρείτε τη συμμετρική & της O ως προς:
- α.** τον άξονα $\chi'\chi$ **β.** τον άξονα $\psi'\psi$
γ. την αρχή των αξόνων **δ.** τη διχοτόμο της γωνίας $\chi O \psi$
- 11.** Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραμμών: $C_1: \chi^2 + \psi^2 = 5$ και $C_2: \psi^2 = 4\chi$
- 12.** Να βρείτε στις παρακάτω περιπτώσεις τα κοινά σημεία των γραμμών C_1, C_2 .
- α.** $C_1: \chi - 2\psi + 1 = 0$ $C_2: \chi + 2\psi + 3 = 0$
β. $C_1: \chi - \psi + 1 = 0$ $C_2: \chi + \psi^2 + 2 = 0$
γ. $C_1: \chi^2 + \psi^2 - 3\chi + \psi = 0$ $C_2: \chi^2 + \psi^2 - 4\chi + \psi + 1 = 0$
- 13.** Δίνονται οι γραμμές
 $C_1: \chi^2 + \psi^2 + 2\chi - 3\psi - 3 = 0$, $C_2: 3\chi - \psi = 0$ και $C_3: \chi - 2\psi + 5 = 0$.
- i.** Ποιες από τις γραμμές C_1, C_2, C_3 , διέρχονται από την αρχή των αξόνων, ποιες από το $A(-1, 2)$ και ποιες από το $B(-3, 0)$;
- ii.** Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_1 και C_2 .
- iii.** Υπάρχει σημείο από το οποίο να διέρχονται και οι τρεις γραμμές;
- 14.** Να βρείτε τα σταθερά σημεία M από τα οποία διέρχονται όλες οι γραμμές που ορίζονται από τις παρακάτω εξισώσεις.
- α.** $(\chi - 2\psi)\lambda + \chi - \psi - 2 = 0$ **β.** $\chi - 3\psi + \lambda(\chi - \psi + 2) = 0$
γ. $(\lambda + 1)\chi + (\lambda - 2)\psi + 1 = 0$ **δ.** $\chi^2 + \psi^2 - 2 + (\lambda(\chi - \psi)) = 0$, λπου $\lambda \in \mathbb{R}$.
- 15.** Έστω ότι η μονοπαραμετρική οικογένεια γραμμών
 $C_\lambda: \lambda^2 + 2(\psi - 1)\lambda - \chi + 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

Να αποδείξετε ότι από το σημείο $M(0, 2)$ διέρχεται μια μόνο γραμμή που ορίζεται από την (1).

- 16.** Αν από το σημείο $M(\chi_0, \psi_0)$ διέρχεται μόνο μια γραμμή που ορίζεται από την εξίσωση: $\lambda^2 + 2(\psi - 2)\lambda - \chi^2 + 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι: $\chi^2 + (\psi_0 - 2)^2 = 1$.