

ΜΙΑ ΕΙΣΩΣΗ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ



Να βρείτε τους ακεραίους x, y αν ισχύει $8^x + 4^y = 513$.

Λύση

Καταρχάς, ας παρατηρήσουμε ότι κανένας εκ των x, y δεν μπορεί να είναι αρνητικός. Αυτό γίνεται φανερό αν θυμηθούμε ότι

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Π.χ. $8^{-3} = \frac{1}{8^3}$ που δεν είναι ακέραιος. Άρα δεν γίνεται ΜΟΝΟ ο x ή ΜΟΝΟ ο y να είναι αρνητικός, αφού το άθροισμα $8^x + 4^y$ ισούται με ακέραιο. Μήπως όμως μπορεί και ο x και ο y να είναι αρνητικοί ακέραιοι; Τότε, αν και κάθε δύναμη ξεχωριστά δίνει μη ακέραιο αποτέλεσμα, ενδέχεται το άθροισμά τους να δίνει ακέραιο αποτέλεσμα. Πάλι μπορούμε να δούμε ότι αυτό δεν είναι δυνατόν να συμβαίνει. Ο λόγος είναι ότι αν οι x, y είναι αρνητικοί ακέραιοι, κάθε δύναμη από τις $8^x, 4^y$ είναι μικρότερη από 1 και άρα δεν γίνεται το άθροισμά τους να ισούται με 513.

Ας παρατηρήσουμε τώρα ότι δεν γίνεται να είναι και ο x και ο y θετικός ακέραιος. Αν συνέβαινε αυτό οι αριθμοί $8^x, 4^y$ θα ήσαν άρτιοι, το οποίο δεν γίνεται, αφού το άθροισμά τους ισούται με έναν περιττό.

Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ένας τουλάχιστον από τους x, y ισούται με μηδέν.

- Αν $x = 0$ η σχέση γίνεται $1 + 4^y = 513$ άρα $4^y = 512$. Κάνοντας δοκιμές διαπιστώνουμε ότι καμία ακέραια δύναμη του τέσσερα δεν δίνει αποτέλεσμα 512.
- Αν $y = 0$ η σχέση γίνεται $8^x + 1 = 513$ άρα $8^x = 512$ και με δοκιμές βρίσκουμε $x = 3$.

Τελικά η μόνη λύση του προβλήματος είναι το ζεύγος $x = 3, y = 0$.