Η ΠΑΙΧΝΙΔΟΜΗΧΑΝΗ

Μία παιχνιδομηχανή δέχεται δύο είδη κερμάτων: κόκκινα και πράσινα. Για κάθε κέρμα που ρίχνουμε, η παιχνιδομηχανή μας επιστρέφει 5 κέρματα του άλλου χρώματος (δηλαδή, αν ρίξουμε ένα κόκκινο μας επιστρέφει πέντε πράσινα ενώ αν ρίξουμε ένα πράσινο μας επιστρέφει πέντε κόκκινα). Ένας παίκτης ξεκινά να παίζει με ένα πράσινο κέρμα. Θα μπορούσε να συμβεί το εξής: μετά από κάποιες επαναλήψεις του παιχνιδιού, ο παίκτης να έχει ίσο αριθμό πράσινων και κόκκινων κερμάτων;

Λύση

Εάν εκτελέσουμε νοητικά τα πέντε πρώτα βήματα του παιχνιδιού και καταγράψουμε όλα τα δυνατά αποτελέσματα, θα έχουμε τον παρακάτω πίνακα (το κ σημαίνει κόκκινα κέρματα και το π σημαίνει πράσινα κέρματα):

<table>
<tr><th colspan="8">$1^{ο}$ βήμα</th></tr>
<tr><td colspan="8">1π ->
5κ</td></tr>
<tr><th colspan="8">$2^{ο}$ βήμα</th></tr>
<tr><td colspan="8">1κ ->
5π + 4κ</td></tr>
<tr><th colspan="8">$3^{ο}$ βήμα</th></tr>
<tr><td colspan="4">1κ ->
10π + 3κ</td><td colspan="4">1π ->
4π + 9κ</td></tr>
<tr><th colspan="8">$4^{ο}$ βήμα</th></tr>
<tr><td colspan="2">1κ ->
15π +2κ</td><td colspan="2">1π ->
9π +8κ</td><td colspan="2">1π ->
3π +14κ</td><td colspan="2">1κ ->
9π +8κ</td></tr>
<tr><th colspan="8">$5^{ο}$ βήμα</th></tr>
<tr><td>1κ ->
20π+1κ</td><td>1π ->
14π+7κ</td><td>1π ->
8π+13κ</td><td>1κ ->
14π+7κ</td><td>1π ->
2π+19κ</td><td>1κ ->
8π+13κ</td><td>1κ ->
14π+7κ</td><td>1π ->
8π+13κ</td></tr>
</table>

Σε αυτό τον πίνακα παρατηρούμε ότι μέχρι το $5^{ο}$ βήμα, δεν έχουμε σε καμία περίπτωση τον ίδιο αριθμό πράσινων και κόκκινων κερμάτων. Τα αποτελέσματα μέχρι το $5^{ο}$ βήμα μας ωθούν να διατυπώσουμε την εικασία ότι δεν θα υπάρξει ίσος αριθμός πράσινων και κόκκινων κερμάτων. Δεν μπορούμε, όμως, να είμαστε σίγουροι για το τι θα συμβεί στα επόμενα βήματα. Επειδή το παιχνίδι μπορεί να συνεχίζεται επ' άπειρον, δεν μπορούμε να ελέγξουμε με τη μέθοδο των δοκιμών την εικασία που διατυπώσαμε. Χρειαζόμαστε, λοιπόν, μία ασφαλή επιχειρηματολογία που να επαληθεύει ή να καταρρίπτει την εικασία που διατυπώσαμε.

Παρατηρήστε, στον πίνακα, τον συνολικό αριθμό των κερμάτων που θα έχουμε σε κάθε βήμα.

Στο τέλος του $1^{ου}$ βήματος, θα έχουμε 5 κέρματα.

Στο τέλος του $2^{ου}$ βήματος, θα έχουμε 9 κέρματα.

Στο τέλος του $3^{ου}$ βήματος, θα έχουμε 13 κέρματα, σε όλες τις δυνατές εξελίξεις.

Στο τέλος του $4^{ου}$ βήματος, θα έχουμε 17 κέρματα, σε όλες τις δυνατές εξελίξεις.

Στο τέλος του $5^{ου}$ βήματος, θα έχουμε 21 κέρματα, σε όλες τις δυνατές εξελίξεις.

Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί στη διατύπωση της εικασίας, ότι σε κάθε περίπτωση, ο συνολικός αριθμός των κερμάτων θα είναι περιττός (μονός). Αν σιγουρευτούμε ότι συμβαίνει αυτό, τότε δεν είναι δυνατόν σε κανένα βήμα να έχουμε ίσο αριθμό κόκκινων και πράσινων κερμάτων.

Πράγματι, εάν στην αρχή ενός οποιουδήποτε βήματος έχουμε περιττό αριθμό κερμάτων, τότε θα ξοδέψουμε ένα κέρμα για να τροφοδοτήσουμε την παιχνιδομηχανή (δεν έχει σημασία αν θα είναι κόκκινο ή πράσινο), οπότε ο αριθμός των κερμάτων που θα μας μείνουν θα είναι άρτιος. Εφόσον η παιχνιδομηχανή θα μας επιστρέψει πέντε κέρματα (δεν έχει σημασία αν θα είναι κόκκινα ή πράσινα), ο συνολικός αριθμός των κερμάτων που θα έχουμε στο τέλος του βήματος θα είναι πάλι περιττός, γιατί αν σε έναν άρτιο αριθμό προσθέσουμε το πέντε, που είναι περιττός αριθμός, θα έχουμε ως αποτέλεσμα έναν περιττό αριθμό. Εφόσον, λοιπόν, στο τέλος του βήματος θα έχουμε περιττό αριθμό κερμάτων, δεν είναι δυνατόν τα κέρματα να χωριστούν σε δύο ίσα μέρη, άρα δεν είναι δυνατόν να έχουμε ίσο αριθμό κόκκινων και πράσινων κερμάτων. Επιπλέον, στο επόμενο βήμα θα ξεκινήσουμε με περιττό αριθμό κερμάτων, άρα στο τέλος του επόμενου βήματος θα έχουμε το ίδιο αποτέλεσμα.

Αφού, λοιπόν, το πρώτο βήμα τελειώνει με 5 κέρματα, δηλαδή με περιττό αριθμό κερμάτων, άρα, όσο και αν συνεχίσουμε το παιχνίδι, θα καταλήγουμε πάντα σε περιττό αριθμό, με αποτέλεσμα να μην έχουμε ποτέ ίσο αριθμό κόκκινων και πράσινων κερμάτων.