Ο ΚΥΛΙΟΜΕΝΟΣ ΦΕΛΛΟΣ ΤΟΥ ΤΑΣΟΥ

Ο Τάσος (ο χημικός) αγόρασε έναν φελλό για δοκιμαστικό σωλήνα που έχει σχήμα κόλουρου κώνου (δηλαδή κώνου που έχει κοπεί ένα κομμάτι του που περιέχει την κορυφή του). Οι βάσεις του φελλού είναι κύκλοι με ακτίνες R=10mm και r=7mm και το ύψος του είναι υ=4mm. Ο Τάσος τοποθέτησε τον φελλό πάνω σε ένα τραπέζι με την κυρτή επιφάνειά του (όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα)

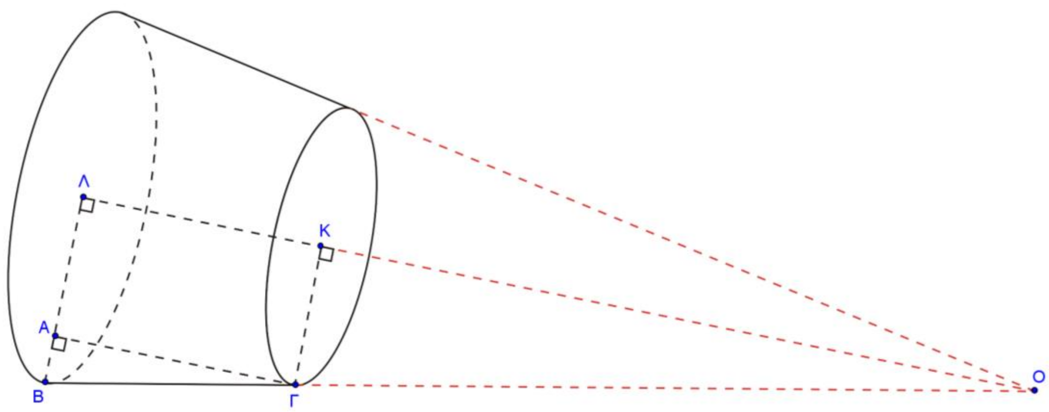
και τον έσπρωξε, οπότε ο φελλός έκανε μία κυκλική κίνηση (όπως φαίνεται στο βίντεο).

Α) Να βρείτε πόσες στροφές θα έχει κάνει ο φελλός γύρω από τον εαυτό του, όταν διαγράψει έναν ολόκληρο κύκλο πάνω στο τραπέζι.

Β) Αν καλύψουμε την κυρτή επιφάνεια του φελλού με μελάνη, να βρείτε το εμβαδό της επιφάνειας που θα αποτυπώσει ο φελλός πάνω στο τραπέζι καθώς περιστρέφεται.

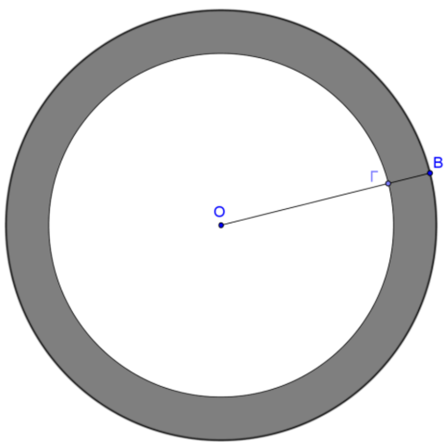
Λύση

Για να καταλάβουμε το είδος της κίνησης που κάνει ο φελλός πάνω στο τραπέζι, πρέπει να λάβουμε υπόψιν ότι ο φελλός είναι ένας κόλουρος κώνος, δηλαδή ένα μέρος ενός ολόκληρου κώνου. Αν ο κώνος ήταν ολόκληρος και τον ακουμπούσαμε πάνω στο τραπέζι με την κυρτή επιφάνειά του, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 1,



Σχήμα 1

τότε, αν τον σπρώχναμε, θα έκανε μία κυκλική κίνηση με κέντρο την κορυφή του, δηλαδή το σημείο Ο και ακτίνα την ΟΒ. Ακόμη και αν λείπει το πάνω μέρος του κώνου, τότε, ο κόλουρος κώνος που μένει, θα ακολουθήσει την ίδια κυκλική τροχιά που θα έκανε ο ολόκληρος κώνος. Ο φελλός, λοιπόν, που είναι ένας κόλουρος κώνος, θα κάνει μία κυκλική κίνηση με κέντρο το σημείο Ο (δηλαδή το σημείο που θα ήταν η κορυφή του κώνου αν αυτός ήταν ολόκληρος). Έτσι, ο φελλός θα κινείται εντός των ορίων των κύκλων (Ο, ΟΒ) και (Ο, ΟΓ), δηλαδή του κύκλου με κέντρο Ο και ακτίνα ΟΒ και του κύκλου με κέντρο Ο και ακτίνα ΟΓ, δηλαδή εντός της γκρι περιοχής όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα 2 (που δείχνει πως φαίνεται από πάνω το αποτύπωμα της κίνησης του φελλού πάνω στο τραπέζι).



Σχήμα 2

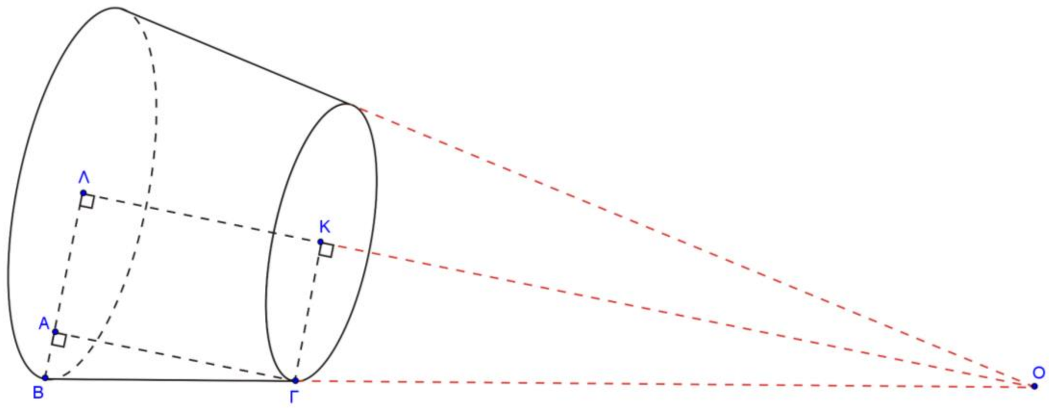
Αφού ξεκαθαρίσαμε το είδος της κίνησης που εκτελεί ο φελλός, μπορούμε να επιχειρήσουμε να απαντήσουμε τα δύο ερωτήματα.

Α) Όταν ο φελλός κάνει μία πλήρη περιστροφή γύρω από τον εαυτό του, θα έχει καλύψει πάνω στον κύκλο (Ο, ΟΒ) στο σχήμα 2, τόση απόσταση όση είναι η περίμετρος του κύκλου της μεγάλης βάσης του φελλού (κόλουρου κώνου), δηλαδή του κύκλου (Λ, ΛΒ) στο σχήμα 1. Άρα, για να βρούμε πόσες στροφές θα κάνει ο φελλός γύρω από τον εαυτό του όταν διαγράψει έναν ολόκληρο κύκλο πάνω στο τραπέζι, θα πρέπει να βρούμε πόσες φορές χωράει η περίμετρος του κύκλου (Λ, ΛΒ) στην περίμετρο του κύκλου (Ο, ΟΒ).

Εύκολα μπορούμε να βρούμε την περίμετρο του κύκλου (Λ, ΛΒ) αφού γνωρίζουμε ότι η ακτίνα του είναι 10mm:

Περίμετρος κύκλου (Λ, ΛΒ) = $2\pi R = 2\pi \cdot 10 = 20\pi$ mm (*δεν αντικαθιστούμε το π με 3,14 για να είναι πιο εύκολες οι πράξεις και για να έχουμε μεγαλύτερη ακρίβεια στους υπολογισμούς*).

Δεν είναι όμως το ίδιο εύκολο να βρούμε την περίμετρο του κύκλου (Ο, ΟΒ) γιατί δεν ξέρουμε την ακτίνα του ΟΒ. Για να την υπολογίσουμε, επιστρέφουμε στο σχήμα 1.



Σχήμα 1

Βρίσκουμε πρώτα την ΑΒ:

$ΑΒ = ΛΒ - ΛΑ = ΛΒ - ΚΓ = 10 - 7 = 3$ mm

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τη ΒΓ εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ:

$ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$

$ΒΓ^2 = 3^2 + 4^2$

$ΒΓ^2 = 9 + 16$

$ΒΓ^2 = 25$

$ΒΓ = 5$ mm

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε τη ΒΟ από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΒΓ και ΛΒΟ. Τα τρίγωνα αυτά είναι όμοια επειδή έχουν δύο γωνίες ίσες (τη γωνία Λ ίση με τη γωνία Α ως ορθές και τη γωνία Β κοινή). Άρα οι πλευρές τους θα είναι ανάλογες:

$$\frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{B\Gamma}} = \frac{\mathrm{\Lambda B}}{\mathrm{AB}}$$

$$\frac{\mathrm{BO}}{5} = \frac{10}{3}$$

$$3 \cdot \mathrm{B0} = 5 \cdot 10$$

$$3 \cdot \mathrm{B0} = 50$$

$$\mathrm{B0} = \frac{50}{3}\ \mathrm{mm}$$

Εφόσον βρήκαμε τη ΒΟ, μπορούμε τώρα να βρούμε και την περίμετρο του κύκλου (Ο, ΟΒ):

Περίμετρος κύκλου (Ο, ΟΒ) = $2\pi R = 2\pi \cdot \frac{50}{3} = \frac{100}{3}\pi$ mm.

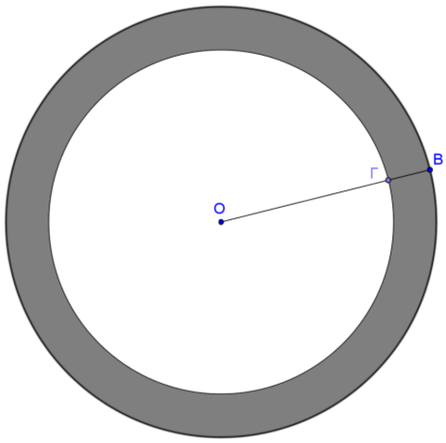
Μπορούμε, λοιπόν, τώρα να βρούμε πόσες φορές χωράει η περίμετρος του κύκλου (Λ, ΛΒ) στην περίμετρο του κύκλου (Ο, ΟΒ), που είναι, όπως εξηγήσαμε πιο πάνω, ο αριθμός των στροφών που θα κάνει ο φελλός γύρω από τον εαυτό του όταν διαγράψει έναν ολόκληρο κύκλο πάνω στο τραπέζι:

$$\text{Αριθμός στροφών} = \frac{\text{Περίμετρος κύκλου (Ο, ΟΒ)}}{\text{Περίμετρο κύκλου (Λ, ΛΒ)}} = \frac{\frac{100}{3}\pi}{20\pi} = \frac{\frac{100}{3}}{20} = \frac{\frac{100}{3}}{\frac{20}{1}}$$

$$= \frac{100 \cdot 1}{20 \cdot 3} = \frac{100}{60} = \frac{5}{3} \approx 1{,}67 \text{ στροφές}$$

(*Όπως παρατηρούμε, δεν μας ενόχλησε που δεν αντικαταστήσαμε το π με 3,14, αφού απλοποιήθηκε*).

Β) Όπως είδαμε προηγουμένως στο σχήμα 2, η επιφάνεια που θα αποτυπώσει ο φελλός πάνω στο τραπέζι καθώς περιστρέφεται (η γκρι περιοχή), είναι ένας κυκλικός δακτύλιος, δηλαδή η περιοχή που βρίσκεται ανάμεσα στους δύο κύκλους.



Σχήμα 2

Για να βρούμε το εμβαδό του κυκλικού δακτυλίου, θα αφαιρέσουμε από το εμβαδό του μεγάλου κύκλου (Ο, ΟΒ) το εμβαδό του μικρού κύκλου (Ο, ΟΓ).

Το εμβαδό του μεγάλου κύκλου είναι:

$$\text{Εμβαδό κύκλου } (\mathrm{O}, \mathrm{OB}) = \pi R^2 = \pi \cdot \mathrm{OB}^2 = \pi \cdot \left(\frac{50}{3}\right)^2 = \frac{2500}{9}\pi \text{ mm}^2$$

Για να βρούμε το εμβαδό του μικρού κύκλου (Ο, ΟΓ) πρέπει να βρούμε πρώτα την ακτίνα ΟΓ. Από το σχήμα 1 προκύπτει ότι:

$$\mathrm{O\Gamma} = \mathrm{OB} - \mathrm{B\Gamma} = \frac{50}{3} - 5 = \frac{50}{3} - \frac{15}{3} = \frac{35}{3} \text{ mm}$$

Οπότε το εμβαδό του μικρού κύκλου θα είναι:

$$\text{Εμβαδό κύκλου } (\mathrm{O}, \mathrm{O\Gamma}) = \pi R^2 = \pi \cdot \mathrm{O\Gamma}^2 = \pi \cdot \left(\frac{35}{3}\right)^2 = \frac{1225}{9}\pi \text{ mm}^2$$

Οπότε, το εμβαδό της επιφάνειας που θα αποτυπώσει ο φελλός πάνω στο τραπέζι καθώς περιστρέφεται θα είναι:

$$\text{Εμβαδό δακτυλίου } = \text{Εμβαδό κύκλου } (\mathrm{O}, \mathrm{OB}) - \text{Εμβαδό κύκλου } (\mathrm{O}, \mathrm{O\Gamma})$$

$$\text{Εμβαδό δακτυλίου } = \frac{2500}{9}\pi - \frac{1225}{9}\pi = \frac{1275}{9}\pi = \frac{425}{3}\pi \text{ mm}^2 \approx 141{,}67 \text{ mm}^2$$