Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

Ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει;

Εννοιολογική Αλλαγή και Ιστορικο-Πολιτισμικές Προσεγγίσεις στην Ανάπτυξη της Έννοιας του Αριθμού.

Κωνσταντίνος Π. Χρήστου

παραδείγματα από τη σχολική τάξη και τη βιβλιογραφία

2.333>2.6

"ο αριθμός με τα περισσότερα ψηφία είναι και ο μεγαλύτερος"

(Nesher & Peled 1986; Resnick et al. 1989)

παραδείγματα από τη σχολική τάξη και τη βιβλιογραφία

δεν υπάρχει άλλος αριθμός ανάμεσα

0.5 και 0.6

(Vamvakoussi & Vosniadou, 2010)

παραδείγματα από τη σχολική τάξη και τη βιβλιογραφία

ποιος είναι ο επόμενος αριθμός του 10;

ο 11

(Vamvakoussi & Vosniadou, 2010)

παραδείγματα από τη σχολική τάξη και τη βιβλιογραφία

2/5<2/7

"όσο μεγαλύτεροι οι αριθμοί τόσο μεγαλύτερο το κλάσμα"

Stafylidou & Vosniadou, 2004

παραδείγματα από τη σχολική τάξη και τη βιβλιογραφία

μπορείτε να γράψετε ένα μεγάλο κλάσμα;

99/100

"όσο μεγαλύτεροι οι αριθμοί τόσο μεγαλύτερο το κλάσμα"

Stafylidou & Vosniadou, 2004

παραδείγματα από τη σχολική τάξη και τη βιβλιογραφία

1/2 + 1/3 = 2/5

“τα κλάσματα προστίθενται αριθμητή με αριθμητή και παρονομαστή με παρονομαστή”

Ni & Zhou, 2005

Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού

whole number bias: η τάση των μαθητών να αποδίδουν χαρακτηριστικά και ιδιότητες των φυσικών αριθμών στους μη-φυσικούς αριθμούς

(Ni & Zhou, 2005)

- Η προκατάληψη του φυσικού αριθμού οφείλεται στην κονστρουκτιβιστικής φύσεως απόπειρα των μαθητών να εφαρμόσουν την προϋπάρχουσα γνώση τους για τους φυσικούς αριθμούς σε καταστάσεις που δεν ισχύει

(Gelman 2000, Smith et al 2005, Vamvakoussi & Vosniadou 2010, Vosniadou et al 2008)

μάθηση με εννοιολογική αλλαγή

Μάθηση με εννοιολογική αλλαγή: **βασικές παραδοχές**

- Οι μαθητές έρχονται σε τάξη με τις δικές τους αντιλήψεις και γνώσεις για τον κόσμο
- Αυτές οι αντιλήψεις είναι:
  - Συνεκτικές
  - Επεξηγηματικές
  - (Επανα-)επιβεβαιώνονται από την καθημερινή εμπειρία
- Οι μαθητές συχνά αντιστέκονται σθεναρά στο να εγκαταλείψουν αυτές τις ιδέες και να δεχθούν αυτές που τους μαθαίνουμε στο σχολείο
- Η χρήση αυτών των αντιλήψεων δημιουργεί δυσκολίες και συστηματικά λάθη

(Vosniadou et al. 2008)

Μάθηση με **εννοιολογική αλλαγή**

Ένα είδος μάθησης όπου η προϋπάρχουσα γνώση θα πρέπει να αναδομηθεί και να αναδιοργανωθεί θεμελιωδώς, για υποδεχθεί τη νέα πληροφορία.

- **Ασθενής αναδιάρθρωση:** προσθετικοί μηχανισμοί εμπλουτισμού που διευρύνει τις προηγούμενες γνώσεις,
  - Οι παλιές έννοιες είναι συμβατές με νέα γνώση
  - π.χ., το “=“
- **Ισχυρή αναδιάρθρωση:** Προϋπάρχουσα γνώση σε σύγκρουση με τη νέα
  - π.χ., η έννοια του αριθμού: φυσικός/ρητός

Suzan Carey, 1999

η αναλογία: γνώση ως θεωρία

- Μια παραγωγική υπόθεση θα ήταν να δούμε τους μαθητές ως φορείς **θεωριών** *(Driver & Easley, 1978)*:
  - μπορεί να ερμηνεύσει τη συστηματικότητα των λαθών και τη δυσκολία να αντικατασταθούν από τη σχολική γνώση
  - μπορεί να δημιουργήσει νέες παραγωγικές υποθέσεις για έρευνα
  - μπορεί να εμπνεύσει νέες παιδαγωγικές προσεγγίσεις σε συγκεκριμένους τομείς γνώσης

- Ο θεωρίες των μαθητών είναι "σαν" τις θεωρίες των επιστημόνων, αλλά δεν είναι επιστημονικές θεωρίες

Αρχικές «θεωρίες» για τους αριθμούς

- Τα παιδιά προσχολικής ηλικίας έχουν διαμορφώσει αρχικές **«θεωρίες»** για τους αριθμούς, οι οποίες βασίζονται στις αρχές της απαρίθμησης διακριτών ποσοτήτων

  (Gelman, 2000, Vosniadou, 2004, Carey, 2009).
- Οι τρεις βασικότερες αρχές είναι οι εξής:
  - Η αρχή της 1-1 αντιστοίχισης των ονομάτων των αριθμών με τα απαριθμούμενα αντικείμενα
  - Η αρχή της σταθερής σειράς των ονομάτων των αριθμών
  - Η αρχή που επιβάλλει το όνομα του τελευταίου αριθμού να αντιπροσωπεύει την πληθικότητα του απαριθμούμενου συνόλου

Υπόθεση της Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού

- Υπόθεση: οι πρώιμες εμπειρίες με τον φυσικό αριθμό υποστηρίζουν μια **αρχική κατανόηση** της έννοιας του αριθμού που οργανώνεται με βάση τις ιδιότητες και το συμβολισμό του **φυσικού αριθμού**
- ενισχύεται τα πρώτα χρόνια της μαθηματικής εκπαίδευσης
  - βλ. χρήση φυσικών αριθμών στα βιβλία

    (Δημητρακοπούλου & Χρήστου 2014)
- καταλήγει να αποτελεί ένα καλοσχηματισμένο σώμα ιδεών (σαν θεωρία) για το **πως μοιάζει ένας αριθμός** και **ποιες οι ιδιότητές του**
- **Μια τέτοια κατανόηση του αριθμού μπορεί:**
  - είτε να υποστηρίξει την κατανόηση/ανακάλυψη νέας γνώσης
    - (όπως, για παράδειγμα, την ύπαρξη επόμενου για κάθε φυσικό αριθμό άρα και την απειρία των φυσικών αριθμών, τις βασικές πράξεις με φυσικούς αριθμούς),
  - είτε να την παρεμποδίσει
    - όπως, για παράδειγμα, στην περίπτωση των κλασμάτων (Hartnett & Gelman, 1998)

Η έννοια του αριθμού

Η έννοια του αριθμού

Φυσικοί

- Διακριτοί
- Υπάρχει ελάχιστο στοιχείο
- Ένας αριθμός έχει μοναδικό συμβολισμό
- Μετράνε διακριτές ποσότητες
- Η διάταξη υποστηρίζεται από την σειρά των αριθμών
- Περισσότερα ψηφία, μεγαλύτερος αριθμός
- Η πρόσθεση και ο πολ/σμός «μεγαλώνουν», - η αφαίρεση και διαίρεση «μικραίνουν»
- Η μονάδα είναι προφανής

Η έννοια του αριθμού

Φυσικοί

- Διακριτοί
- Υπάρχει ελάχιστο στοιχείο
- Ένας αριθμός έχει μοναδικό συμβολισμό
- Μετράνε διακριτές ποσότητες
- Η διάταξη υποστηρίζεται από την σειρά των αριθμών
- Περισσότερα ψηφία, μεγαλύτερος αριθμός
- Η πρόσθεση και ο πολ/σμός «μεγαλώνουν», - η αφαίρεση και διαίρεση «μικραίνουν»
- Η μονάδα είναι προφανής

Ρητοί

- Πυκνοί
- Δεν υπάρχει ελάχιστο στοιχείο
- Ένας αριθμός, πολλοί διαφορετικοί συμβολισμοί
- Μετράνε και συνεχείς ποσότητες
- Η διάταξη δεν υποστηρίζεται από τη σειρά των αριθμών
- Περισσότερα ψηφία, όχι απαραίτητα μεγαλύτερος αριθμός
- Η πρόσθεση και ο πολ/σμός δεν «μεγαλώνουν» πάντα τους αριθμούς
- Η μονάδα δεν είναι πάντα προφανής

προκατάληψη του φυσικού αριθμού στην κατανόηση των αλγεβρικών μεταβλητών

οι δικές μου μελέτες

από τον αριθμό στην μεταβλητή

- Μεταβλητή: ένα γράμμα της αλφαβήτου που στην άλγεβρα αναπαριστά τον γενικευμένο πραγματικό αριθμό

-3	6	-4,25	-0,023
3/4	α		1
0			-1/2
2	-45	7,5	4.555

- Αλγεβρική παράσταση: 4α

Παρερμηνείες των μαθητών με τη χρήση των γραμμάτων

- Σύμβολο που αναπαριστά αντικείμενα ή συντομογραφίες ονομάτων
    - π.χ. β για βάρκες, Ν για Νίκος

- Δυσκολία κατανόησης του γενικευμένου αριθμού: ένα σύμβολο που παίρνει αξία από ένα εύρος τιμών και όχι έναν μόνο συγκεκριμένο αριθμό
    - Παίρνουν τιμές με βάση τη θέση τους στο αλφάβητο, π.χ., h=8

(Alibali, Knuth, Hattikudur, McNeil, & Stephens, 2007· Booth, 1984· , Kieran, 1992· Kuchemann, 1988· Stacey & MacGregor 1997).

Αρχικές μελέτες Ι

- **Υπόθεση**: οι μαθητές έχουν την τάση να θεωρούν ότι οι μεταβλητές αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς

Συμμετέχοντες: παιδιά Β' και Γ' Γυμνασίου

Υλικά: Δύο ερωτηματολόγια ανοιχτού και ένα κλειστού τύπου

ΕΡ/Α: «Γράψτε αριθμητικές τιμές που νομίζετε ότι μπορεί να πάρει το...»

α, -β, 4γ, 1/γ, α/β, δ+δ+δ, κ+3

ΕΡ/Β: «Γράψτε αριθμητικές τιμές που νομίζετε ότι <u>δεν</u> μπορεί να πάρει το...»

Christou & Vosniadou (2005, 2012)

Συνοπτικά αποτελέσματα

Συνοπτικά αποτελέσματα

Συνοπτικά αποτελέσματα

μπορεί **(ΕΡ/Α)**

α → **1, 2, 3, …**

4γ → **4*1, 4*2, …**

$\frac{a}{\beta}$ → $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$

δ+δ+δ → **1+1+1, 2+2+2**

-β → **-1, -2, -3, …**

Συνοπτικά αποτελέσματα

μπορεί **(ΕΡ/Α)**		δεν μπορεί **(ΕΡ/Β)**	
α →	**1, 2, 3, …**	**α** →	**-1, -2, -3, …**
4γ →	**4*1, 4*2, …**	**-β** →	**1, 2, 3, …**
$\frac{a}{\beta}$ →	$\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$	$\frac{\alpha}{\beta}$ →	$\frac{-2}{-3}$ $\frac{-3}{-4}$
δ+δ+δ →	**1+1+1, 2+2+2**	**4γ** →	**4*(-1), 4*(-2)**
-β →	**-1, -2, -3, …**	**δ+δ+δ** →	**(-1)+(-1)+(-1)** **(-2)+(-2)+(-2)**

Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας

Κωνσταντίνος Π. Χρήστου

Ευρήματα

Οι μαθητές τείνουν να θεωρούν ότι τα γράμματα στην άλγεβρα αναπαριστούν μόνο φυσικούς αριθμούς

Οι μαθητές εμφανίστηκαν να επηρεάζονται από το ***‘φαινομενικό πρόσημο’*** της αλγεβρικής παράστασης

Το πρόσημο που φαίνεται να έχει η αλγεβρική παράσταση ως επιφανειακό χαρακτηριστικό της μορφής της

π.χ. ‘–β’ αναπαριστά αρνητική ποσότητα

‘4γ’ αναπαριστά θετική ποσότητα

επανάληψη της μελέτης

Τα αποτελέσματα ενισχύθηκαν από παρόμοια αποτελέσματα σε μελέτη

- με χρήση κλειστού ερωτηματολογίου
  - υπάρχουν αριθμοί από τους δοσμένους που δεν θα μπορούσαν να αποδοθούν στις συγκεκριμένες αλγεβρικές παραστάσεις;
- και συνεντεύξεις
  - ποιο είναι μεγαλύτερο το 5δ ή το 4/δ?

Christou & Vosniadou, 2005, 2012

Σχεδιασμός

Συναρτήσεις /γραφικές παραστάσεις

- f(x)=2x+1
- f(x)= 1/x, (x≠0)

(παράδειγμα)

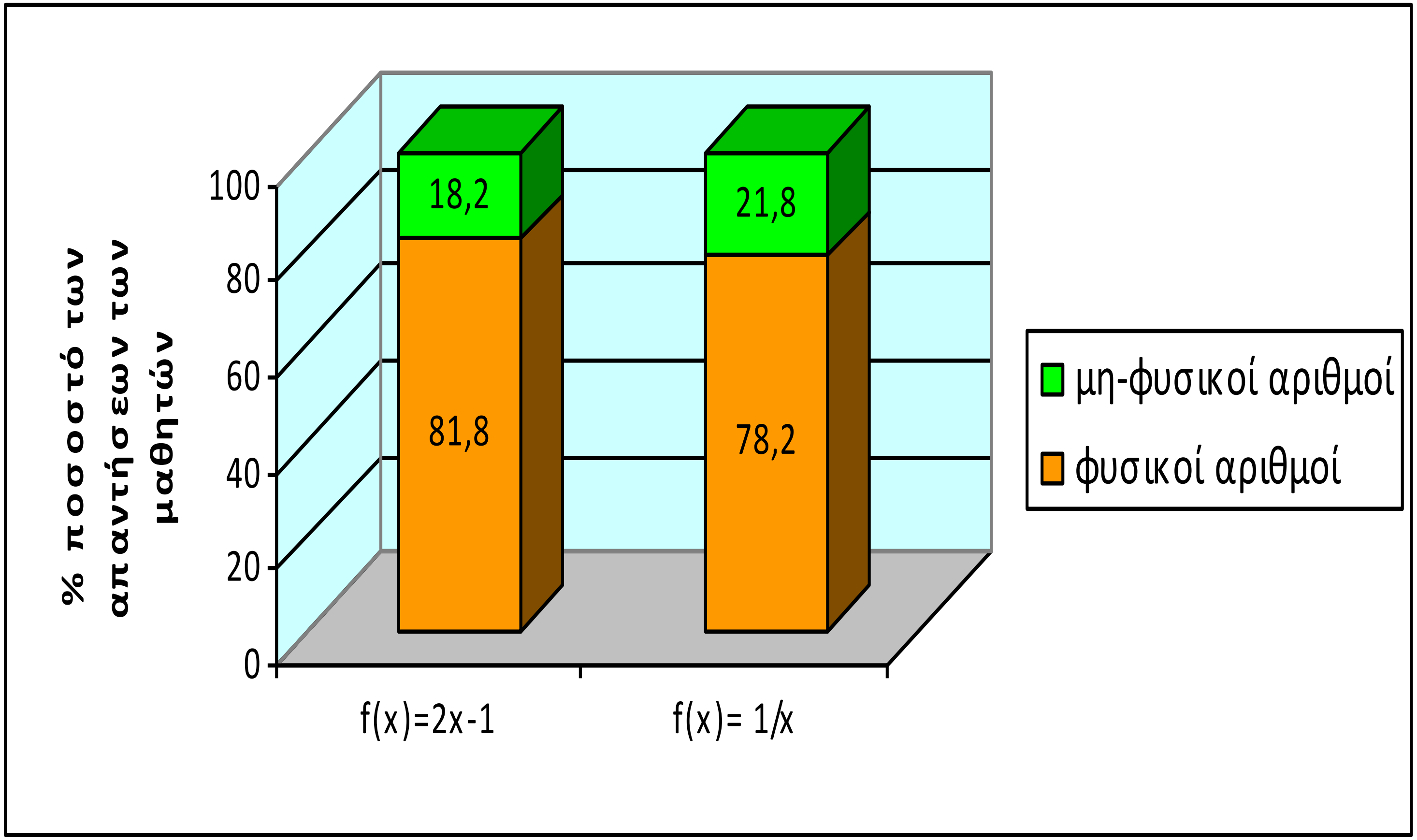
$f(x)= 2x+1$

Συμπλήρωσε τον πίνακα τιμών

x							
f(x)							

Κάνε την γραφική παράσταση

Αποτελέσματα



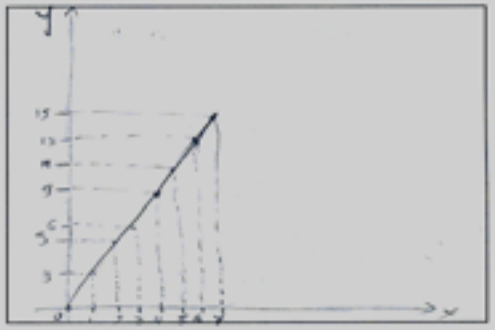
Αποτελέσματα

- Δίνεται η συνάρτηση:
  f(x)= 2x+1

Συμπληρώστε τον πίνακα τιμών

x	1	2	3	4	5	6	7
f(x)	3	5	6	9	11	13	15

(χώρος για πράξεις)



Κάντε τη γραφική παράσταση

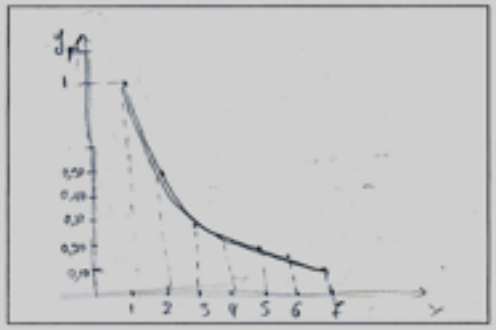
- Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{1}{x}\quad ,x\neq 0$$

Συμπληρώστε τον πίνακα τιμών

x	1	2	3	4	5	6	7
f(x)	1	0,5	0,3	0,25	0,2	0,13	0,14

(χώρος για πράξεις)



Κάντε τη γραφική παράσταση

Μια κυρίαρχη απάντηση

και άλλες συνέπειες

Έργα κατανόησης προσήμου αλγεβρικών παραστάσεων από το πλαίσιο:

- των συναρτήσεων με τετραγωνικές ρίζες:

$$\sqrt{2x+3} \qquad \sqrt{-2-3y}$$

- ανισώσεων:

$$3 < \frac{1}{2x}, x \neq 0$$

- απόλυτων τιμών:

$$\left|-2-3x\right| = 2+3x$$

(Christou & Vosniadou, 2009)

προκατάληψη του φυσικού αριθμού στις αριθμητικές πράξεις

πρόσφατες μελέτες

Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού στις Αριθμητικές Πράξεις

Στις πράξεις μεταξύ αριθμών:

Η πρόσθεση και ο πολ/σμός μεγαλώνουν τους αριθμούς (εκτός κι αν εμπλέκονται το 0 και το 1 αντίστοιχα).

Η αφαίρεση και η διαίρεση μικραίνουν τον αφαιρετέο και τον διαιρετέο αντίστοιχα.

Αυτό όμως δεν ισχύει στου μη-φυσικούς αριθμούς

- 8*0.5 (=4) είναι μικρότερο από 8
- 7: 0.2 είναι μεγαλύτερο του 7
- 7+(-2) είναι μικρότερο του 7

Διαισθητικές πεποιθήσεις για τις πράξεις

Αρχικά επισημάνθηκε από τον Fischbein (1985) σε μελέτη για την επιλογή πράξεων σε λεκτικά προβλήματα

Ερμηνεία:

Οι μαθητές διαθέτουν ένα άδηλο πρωτόγονο διαισθητικό μοντέλο για κάθε πράξη

- Πολ/σμός ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση
- Διαίρεση ως διαμοιρασμός
- Πρόσθεση ως συσσώρευση
- Αφαίρεση ως απομάκρυνση

Αυτά τα μοντέλα υποστηρίζονται και ενισχύονται από την εμπειρία των πράξεων με φυσικούς αριθμούς

βλ. επίσης: Bell, Swan, & Taylor, 1981; De Corte & Verschaffel, 1996; Fischbein, Deri, Nello, & Marino, 1985; Greer, 1994

Πρόσφατα ευρήματα

Πρόσφατες μελέτες εξέτασαν τις διαισθητικές αντιλήψεις μαθητών και ενήλικων σε αριθμητικές πράξεις ανάμεσα σε αριθμούς και γράμματα

π.χ, 5+2x είναι πάντα μεγαλύτερος του 5

3-12z μπορεί να είναι μικρότερος από 3

Ερωτήσεις/έργα που ήταν συμβατά ή όχι με τις διαισθητικές αντιλήψεις

Τα αποτελέσματα υποστήριξαν τις υποθέσεις ότι υπάρχουν ισχυρές διαισθητικές αντιλήψεις ακόμα και σε ενήλικους σε σχέση με τα αποτελέσματα των πράξεων, πιο συγκεκριμένα ότι:

Η πρόσθεση και πολ/σμός μεγαλώνουν

Η αφαίρεση κι η διαίρεση μικραίνουν

(Vamvakoussi, Van Dooren, & Verschaffel, 2012, 2013, Van Hoof, et. al. 2013)

Μέθοδος

Συμμετέχοντες

μαθητές από δημόσια Δημοτικά σχολεία, Γυμνάσια, και ενήλικες σε Ελλάδα και Βέλγιο

Υλικά

π.χ. 2 : ...= 5 Γίνεται ☐

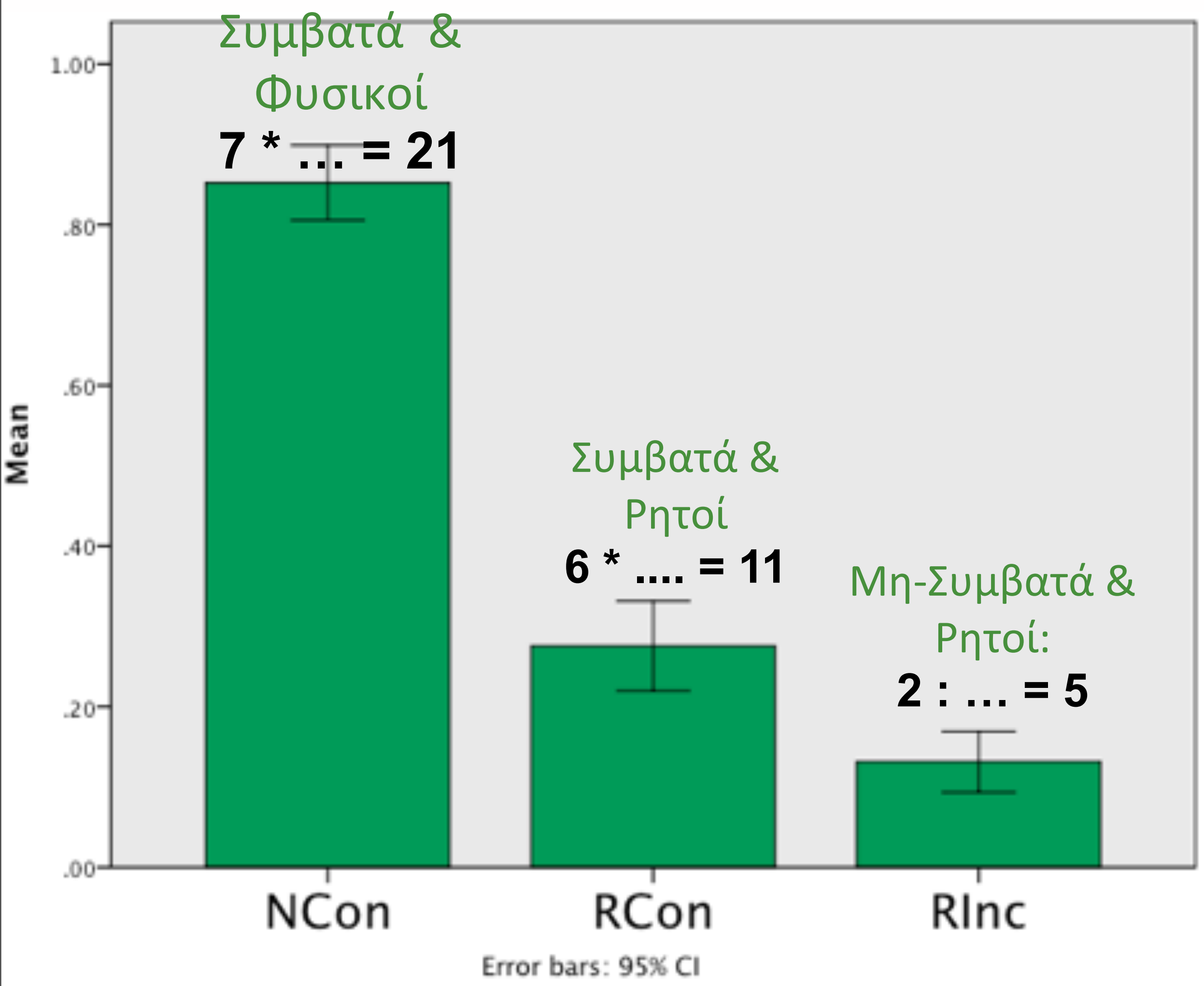
Δεν γίνεται ☐

Συμβατά & Φυσικοί: **7 × … = 21**

Συμβατά & Ρητοί: **6 × .... = 11**

Μη-Συμβατά & Ρητοί: **8 × … = 5**

Αποτελέσματα



αποτελέσματα

Υπόθεση:

Η προκατάληψη του φυσικού αριθμού επιδρά με δύο τρόπους στις μαθηματικές πράξεις:

- Από τη μια μεριά υποστηρίζει τη σύνδεση κάθε πράξης με συγκεκριμένα αποτελέσματα, δηλαδή ότι η πρόσθεση κι ο πολ/σμός πάντα μεγαλώνουν ενώ η αφαίρεση κι η διαίρεση πάντα μικραίνουν τους αριθμούς
- Σε περιπτώσεις πράξεων με αριθμούς που δεν αναπαριστώνται από συγκεκριμένα νούμερα (αλλά με γράμματα ή κενά) η προκατάληψη του φυσικού αριθμού επηρεάζει τους μαθητές να βγάζουν γενικά συμπεράσματα για τα αποτελέσματα των πράξεων δοκιμάζοντας μόνο φυσικούς αριθμούς

η προκατάληψη του φυσικού αριθμού

και η επίδρασή του στις αριθμητικές πράξεις (βλ. η παρανόηση: “ο πολλαπλασιασμός πάντα μεγαλώνει”)

- επηρεάζει τους μαθητές από την εισαγωγή τους στους ρητούς (Δ’ Δημοτικού) *(Christou, 2015)*
- συνεχίζει να επηρεάζει τους μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου *(Van Hoof et al., 2015),*
- παραμένει ισχυρή σε ενήλικους μη ειδικούς *(Vamvakoussi et al., 2013),*
- ενώ φαίνεται να επιλύεται μόνο στους μαθηματικούς *(Obersteiner et al., 2015)*

προτάσεις για την αντιμετώπιση του προβλήματος

διδασκαλία για Εννοιολογική Αλλαγή

Ένα Δίλημμα:

- **Αλλαγή στη σειρά απόκτησης εννοιών:**
  - κατέβασμα ύλης όπου είναι εφικτό
    - αλλά πάντα θα χρειάζεται να αλλάξουμε κάτι που ξέραμε
- **Διαχείριση της αλλαγής:**
  - Διευκόλυνση μετα-εννοιολογικής επίγνωσης - μεταγνωστικές δεξιότητες
  - Δεξιότητες αναστολής (inhibition) της αρχικής-αυτόματης γνώσης
  - Μαθητές με κριτική σκέψη, Εμπρόθετη μάθηση, Αυτορύθμιση
  - Κίνητρα για αλλαγή
  - Αλλαγή στάσεων για τα μαθηματικά και πώς μαθαίνονται
  - Συνεχής συναισθηματική και γνωστική υποστήριξη για την αλλαγή
    - χρήση αναπαραστάσεων (παιχνίδια, μοντέλα, κτλ.)
    - αναλογίες
    - γνωστική σύγκρουση με προϋποθέσεις - ανατρεπτική επιχειρηματολογία
- **Take the long perspective**
  - όπου είναι δυνατόν να γίνεται εισαγωγή στις έννοιες με τρόπο που να ενισχύονται διαισθήσεις που θα είναι πιο υποστηρικτικές για τη μελλοντική μάθηση

ο αριθμός κι ο πολλαπλασιασμός μέσα από την ιστορικό-πολιτισμική

Διαφορές ανάμεσα στον κονστρουκτιβισμό και την πολιτισμική-ιστορική θεωρία

"Η μάθηση και η ανάπτυξη δε συμβαίνει σε ένα πολιτισμικό κενό περιβάλλον αλλά σε μία πλούσια πολιτισμικά κοινότητα"

Οι ιδέες του συχνά υποβιβάζονται με τη χρήση του όρου κοινωνικός-κονστουκτιβισμός (social-constructivism) για να περιγράψει τη μάθηση/ανάπτυξη που συμβαίνει σαν διαδικασία μαθητείας, μέσα σε κοινότητες μάθησης, με συμμετοχή σε αυθεντικές/ρεαλιστικές καταστάσεις, κτλ.

Σύμφωνα με τον Vygotsky μία επιστημονική έννοια έχει κατασκευαστεί **ιστορικά** από την πολιτισμική κοινότητα, και άρα είναι ένα προϊόν της "universal generic thought" (Davydov, 1990, p. 311).

Οι μαθητές (τα νέα μέλη της κοινότητας) δεν κατασκευάζουν/ανακαλύπτουν από την αρχή κάθε έννοια και κάθε εργαλείο αλλά οικειοποιούνται την ήδη προκατασκευασμένη από την πολιτισμική κοινότητα γνώση και τα εργαλεία της

- π.χ., τη γλώσσα, τα σύμβολα, τα μαθηματικά

ο Vygotsky για τις έννοιες

•**καθημερινές έννοιες**/αυθόρμητες (spontaneous), οι οποίες διαμορφώνονται μέσα από την καθημερινή εμπειρία

•**επιστημονικές**/θεωρητικές **έννοιες**, οι "αληθινές έννοιες" (scientific/theoretical, true concepts), που ξεπερνά σε αφαίρεση τις αυθόρμητες έννοιες και για την κατάκτησή τους απαιτείται διδακτική διαμεσολάβηση

– π.χ. ο κύκλος ημέρας / νύχτας: αν αφήσουμε τα παιδιά μόνο στην παρατήρηση του ήλιου να "πηγαίνει πάνω/κάτω" ποτέ δεν θα κατανοήσει την περιστροφή της γης

– Οι μαθηματικές έννοιες ανήκουν στις επιστημονικές/αληθινές έννοιες, που χρειάζονται διδακτική διαμεσολάβηση

οι μαθητές <u>πρέπει</u> να διδάσκονται να σκέφτονται θεωρητικά/αφηρημένα

– μπορούν να το κάνουν από την ηλικία των 7 (όχι από τα 12 όπως έλεγε ο Piaget)

•κι έτσι θα αναπτυχθούν καθώς: **"η μάθηση οδηγεί σε ανάπτυξη"**

κριτική στην Κονστρουκτιβιστική προσέγγιση:

Κονστρουκτιβιστική προσέγγιση: προσπάθεια δόμησης της γνώσης για τον αριθμό στις αυθόρμητες/διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών για τον αριθμό που απορρέουν από την απαρίθμηση, κι όχι τον επαναπροσδιορισμό τους σε έναν πιο θεωρητικό/αφηρημένο τρόπο κατανόησης της έννοιας (ως θα όφειλε να κάνει ο διδάσκων μιας επιστημονικής έννοιας)

Davydov (1991)

Στην απαρίθμηση μπορεί να δομηθούν οι θετικοί ακέραιοι, από τους οποίους, φορμαλιστικά, εισάγονται οι ρητοί αριθμοί:

– με απαρίθμηση διακριτών κομματιών μιας πίτσας για την εισαγωγή στο κλάσμα ως μέρος του όλου
– κι αργότερα το κλάσμα ορίζεται ως το πηλίκο της δύο ακεραίων a/b (b≠ 0). (Αυτό επιτρέπει, για παράδειγμα το 2/3 ή το 5/4, ενώ το 2/0 αρχικά αποκλείεται από τη σφαίρα του αριθμού)

ο αριθμός από πολιτιστική-ιστορική σκοπιά

Ο αριθμός (ως γενικευμένη έννοια) αναπτύχθηκε μέσα από τη διαδικασία της μέτρησης και όχι ως φορμαλιστική γενίκευση σχέσεων των φυσικών αριθμών (που προκύπτουν από την απαρίθμηση)

- αυτή η σειρά ήταν το αποτέλεσμα της μαθηματικής τους (φορμαλιστικής) θεμελίωσης, που προέκυψε κάποια στιγμή στην ιστορία των μαθηματικών

Ο **φυσικός αριθμός** (που μετράει πλήθος διακριτών ποσοτήτων με την απαρίθμηση) είναι **μέρος του μη-φυσικού αριθμού** που εκφράζει σχέσεις ποσοτήτων (που προκύπτουν από τη μέτρηση συνεχών ποσοτήτων)

- έτσι η απαρίθμηση αποτελεί υποκατηγορία της μέτρησης που εφαρμόζεται σε διακριτές ποσότητες με εφαρμογή ως μονάδα μέτρησης τη Μονάδα

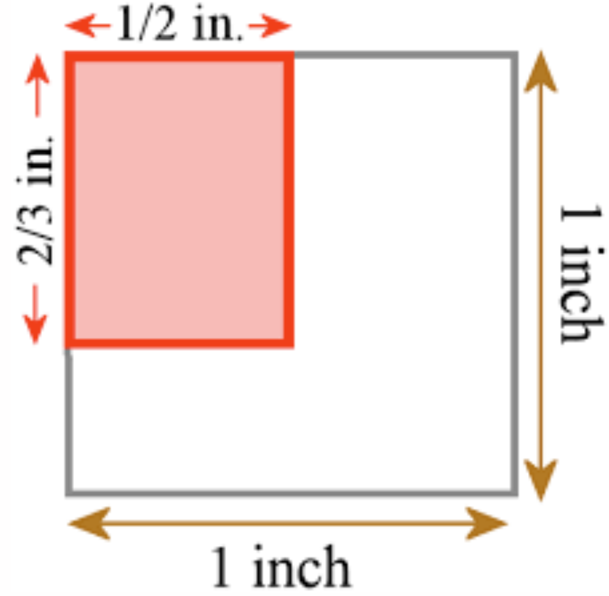
γιατί **ιστορικό-πολιτισμική προσέγγιση;**

•Ιστορικά κατέστη κάποια στιγμή αναγκαίο να παραδεχτούμε τα αποτελέσματα της μέτρησης, όπως τους άρρητους αριθμούς, ως μέρη του συνόλου των πραγματικών αριθμών (π.χ., το μήκος της διαγωνίου τετραγώνου με πλευράς τη μονάδα, ή την περιφέρεια ενός κύκλου).

•Αυτό δεν επιτεύχθηκε χωρίς αναταραχή, δεδομένου ότι οι Έλληνες είχαν υποβιβάσει τους άρρητους στην κατηγορία των «μεγεθών», ενώ παραδέχονται μόνο τους ακέραιους αριθμούς ως αριθμούς.

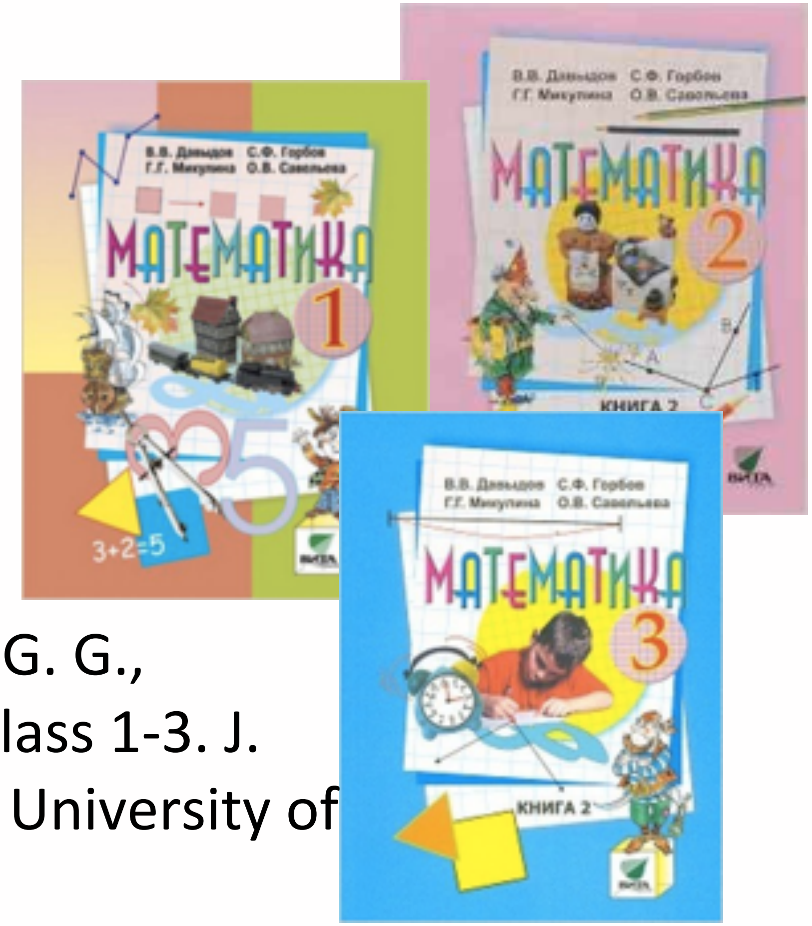
•Με την ανάπτυξη των πραγματικών αριθμών μέσω της μέτρησης και την έκφραση σχέσεων ανάμεσα σε ποσότητες, αυτή η ιστορικά γνωσιακή αναδόμηση φαίνεται ότι μπορεί να αποφευχθεί από τους μαθητές.

ο αριθμός κι ο πολλαπλασιασμός μέσα από την ιστορικό-πολιτισμική προσέγγιση



ο αριθμός κι ο πολλαπλασιασμός μέσα από την ιστορικό-πολιτισμική προσέγγιση

μέσα από τη λογική του αναλυτικού προγράμματος που έγραψε ο Davydov για τις τάξεις 1-3, εφαρμόζοντας τη θεωρία του Vygotsky



Davydov, V. V., Gorbov, S. F., Mikulina, G. G., Saveleva, O. V. (1999a). Mathematics Class 1-3. J. Schmittau (Ed.). Binghamton, NY: State University of New York.

Κάποιες βασικές αρχές του Α.Π. του Davydov

Οι μαθητές στην 1η τάξη δεν ξεκινούν με αριθμολέξεις κι απαρίθμηση αλλά με σύγκριση (ευθύγραμμων τμημάτων, επιφανειών, όγκου, βάρους)

– αρχικά άμεσες συγκρίσεις (που βασίζονται μόνο σε αντιληπτικές ικανότητες)
– μετά περνούν σε καταστάσεις όπου δεν μπορεί να γίνει άμεση σύγκριση (η ποσότητα είναι πολύ κοντινή ή/και δεν γίνεται να μεταφερθούν σε θέση ώστε να συγκριθούν άμεσα) και γίνεται χρήση μονάδας μέτρησης

Κάποιες βασικές αρχές του Α.Π. του Davydov

πρόβλημα:

Να συγκρίνουν δύο μήκη με ένα μικρότερο που θα αποτελέσει τη μονάδα μέτρησης

- Τα παιδιά της τάξης μετρούν με το μικρό U το μεγάλο A και εκφράζουν τη σχέση με μάρκες, π.χ., A= *****B (A=5B)

• με αυτόν τον τρόπο οι ισότητες κατανοούνται ως σχέσεις ποσοτήτων και οι πράξεις ως “αριθμητικές δράσεις” πάνω στις μετρημένες ποσότητες

  – π.χ, ... καταλήγοντας σε A=5B, A/B=5, B/5=A

$$U \overset{|||}{\dashrightarrow} A$$

•οι σχέσεις αυτές μπορούν στο μέλλον να εισάγουν στα **κλάσματα** ως σχέσεις ποσοτήτων

ο πολλαπλασιασμός μέσα από την ιστορικό-πολιτισμική προσέγγιση

Μια δραστηριότητα

τα παιδιά κάνουν ότι εργάζονται για το τοπικό καταφύγιο ζώων και πρέπει να δώσουν σε κάθε γατάκι ένα πολύ μικρό χάρτινο ποτήρι νερό που γεμίζει από μια πολύ μεγάλη κανάτα.

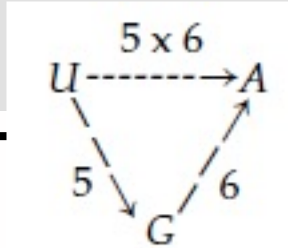
Πρέπει να μάθουν πόσα γατάκια θα λάβουν το νερό.

Η διαδικασία είναι κουραστική, αλλά υπάρχουν κι άλλα μεγαλύτερα ποτήρια στο τραπέζι, στα οποία δεν γίνεται καμία αναφορά.

Τελικά κάποιο παιδί θα προτείνει να βρουν πόσα μικρά χάρτινα ποτήρια νερό γεμίζουν από ένα από τα μεγαλύτερα ποτήρια και στη συνέχεια να δουν πόσα από τα μεγαλύτερα ποτήρια μπορούμε να γεμίσουν από την κανάτα. Για παράδειγμα, ένα ποτήρι μπορεί να γεμίσει 5 από τα χάρτινα ποτηράκια, και η κανάτα μπορεί να γεμίσει 6 ποτήρια. Τώρα η κατάσταση πρέπει να σχηματοποιηθεί λίγο διαφορετικά.

Τώρα το σχήμα θα πρέπει να αναπαριστά τη μεταβολή της μονάδας μέτρησης από μια μικρότερη μονάδα U (χάρτινο ποτηράκι) σε μια μεγαλύτερη μονάδα G (το ποτήρι), με την οποία μπορούμε στη συνέχεια να μετρήσουμε τον όγκο του νερού της κανάτας A.

(Davydov, 1992 στο Schmittau, 1994)



ο πολλαπλασιασμός μέσα από την ιστορικό-πολιτισμική προσέγγιση

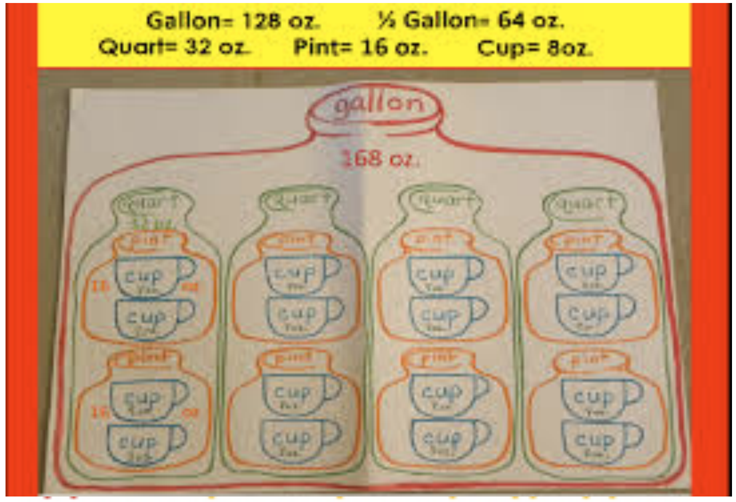
Με τον τρόπο αυτό ο πολλαπλασιασμός ορίζεται ως μια διαδικασία μέτρησης όπου απαιτείται μια αλλαγή στη μονάδα

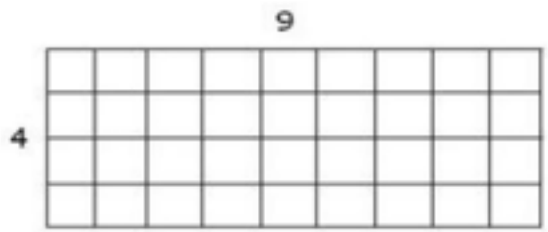
- (από μια μικρότερη μονάδα σε μία μεγαλύτερη) (Davydov, 1992).

Έτσι ο πραγματικός αριθμός προκύπτει από τη διαδικασία της μέτρησης κι όχι ως “πηλίκα” των ακεραίων αριθμών

Με τον τρόπο αυτό ο πολ/σμός δεν ανάγεται στην πρόσθεση με τα προβλήματα που αυτή ενέχει.

Εισάγονται στο μοντέλο του πολ/σμού ως εμβαδόν επιφάνειας





εμπειρικά δεδομένα

Μια συγκριτική μελέτη που σύγκρινε:

- 40 μαθητές υψηλών επιδόσεων δευτεροβάθμιας και φοιτητές στις Ηνωμένες Πολιτείες
- και 24 της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας μαθητές στη Ρωσία που είχαν κάνει τις πρώτες τρεις τάξεις με το εν λόγω Α.Π. και συνέχισαν με το παραδοσιακό

Schmittau, 1994

οι συμμετέχοντες από ΗΠΑ

- Σε απάντηση στο ερώτημα «Τι είναι ο πολλαπλασιασμός;» όλοι δήλωσαν ότι είναι “επαναλαμβανόμενη πρόσθεση”.
- Περισσότερο από 90% κατηγοριοποίησε ως “πολλαπλασιασμό” το 4 × 3, και το μονώνυμο ab, αλλά όχι το εμβαδό της επιφάνεια ενός παρ/μου.
- Η πλειοψηφία νοηματοδότησε το μονώνυμο ab, αντικαθιστώντας τιμές θετικών ακεραίων στα a και b,
  - Μόνο ένας μαθητής σημείωσε ότι a και b θα μπορούσε να είναι κάθε πραγματικός αριθμός,
- μόνο 12 από τους μαθητές των ΗΠΑ ανέφερε ότι είχε νόημα για αυτούς ο πολλαπλασιασμός (2χ + y) (x + 3γ). ΟΛΟΙ από αυτούς απέδωσαν νόημα αντικαθιστώντας μικρούς ακέραιους αριθμούς για το x και y.
- Όταν τους ζητήθηκε να υποδείξουν το εμβαδό A της επιφάνειας, A = bh (περιοχή = βάση × ύψος), έδιναν τυχαία αριθμούς στον τύπο και δεν έκαναν κάποιο σχήμα με πλευρές b και h.
  - Συχνά μπέρδευαν τη επιφάνεια με την περίμετρο.

...σε αντίθεση
οι Ρώσοι μαθητές

•βαθμολόγησαν το εμβαδόν μιας ορθογώνιας περιοχής A = bh ως περισσότερο χαρακτηριστικό του πολ/σμού παρά το 4 × 3, και πολλοί σχολίασαν ότι αυτό ήταν πάρα πολύ εύκολο και, ως εκ τούτου, χωρίς ενδιαφέρον.

•κανείς δεν χαρακτήρισε τον πολ/σμό ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση και δεν έδειξαν κανένα δείγμα της παρανόησης “ο πολ/σμός πάντα μεγαλώνει”

•κανένας δεν μπέρδεψε εμβαδόν με περίμετρο, και ακόμη και οι νεότεροι μαθητές αναπαριστούσαν τους πολλαπλασιασμούς με περιοχές ορθογωνίων παραλληλογράμμων

•μπορούσαν με σαφήνεια να εξηγήσουν την αλλαγή της μονάδας, από ένα μικρό τετράγωνο το οποίο επαναλαμβανόμενο θα σχηματίσει το ορθογώνιο. Αυτή είναι η ουσία της ορθογώνιας περιοχή, και προέρχεται απευθείας από την σε βάθος εννοιολόγηση του πολλαπλασιασμού.

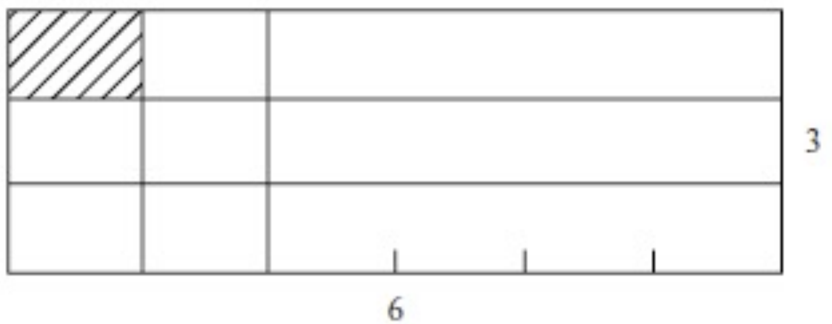


FIGURE 11.1a Model of area by a Russian student illustrating change in unit from a single square to a rectangular strip of such squares.

ιστορικό-πολιτισμική προσέγγιση

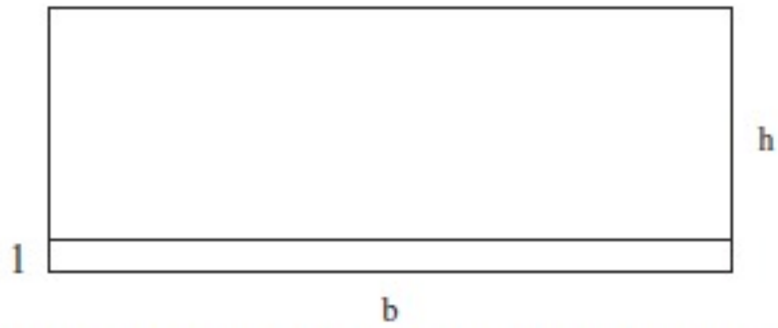


FIGURE 11.1b Model of area by a Russian student illustrating transition from linear dimension b to a rectangular strip of dimensions $b \times 1$.

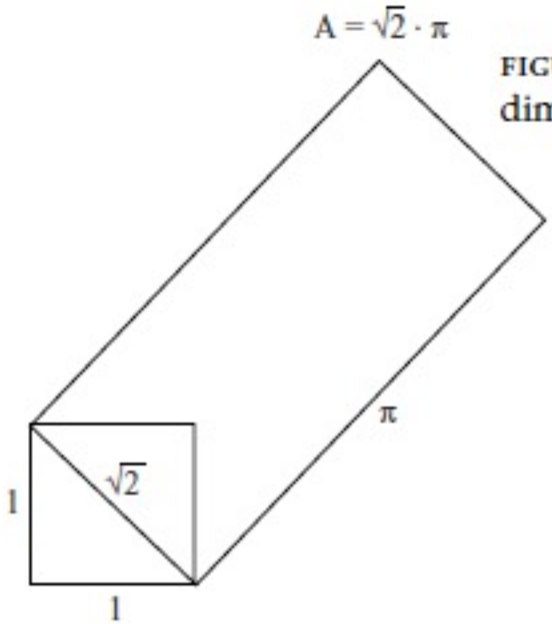


FIGURE 11.3 Russian ninth-grade student's model of $\sqrt{2} \cdot \Pi$ as the area of a rectangle.

Συζήτηση

- Υπάρχουν κι άλλες δυσκολίες με τη κατανόηση των ρητών πέραν από αυτές που μπορούν να εξηγηθούν από την Προκατάληψη του Φυσικού Αριθμού
- Όποτε μπορούμε να χτίσουμε τη νέα γνώση πάνω σε υποστηρικτικές αρχικές διαισθήσεις καλό είναι να το κάνουμε.
- Στις περιπτώσεις όμως που αυτό δεν γίνεται (βλ. περιπτώσεις μάθησης με εννοιολογική αλλαγή) θα πρέπει να μαλετήσουμε τις θεμελιώδεις διαφορές ανάμεσα στις έννοιες
    - κι έτσι να βρούμε τρόπους να βοηθήσουμε τους μαθητές χρονοβόρα και δύσκολη αλλαγή των αρχικών διαισθήσεων
- Για τον Διδακτικό Μετασχηματισμό μιας έννοιας χρειάζεται:
    - εννοιολογική ανάλυση των χαρακτηριστικών της
    - ιστορικο-πολιτισμική ανάλυση της γενεολογία της
    - ώστε οι εκπαιδευτικές προσεγγίσεις να είναι αυθεντικές εννοιολογικά
- Η εισαγωγή στους αριθμούς μέσα από τη μέτρηση ποστήτων φαίνεται να αποτελεί μια παραγωγική υπόθεση

ευχαριστώ για την προσοχή σας

kpchristou@gmail.com

προτεινόμενη βιβλιογραφία

Για Προκατάληψη Φυσικού Αριθμού και Εννοιολογική Αλλαγή:

- Christou, K. P. (2015) Natural number bias in operations with missing numbers." ZDM Mathematics Education, 47(5), 1-12. doi:10.1007/s11858-015-0675-6
- Christou, K. P. & Vosniadou, S. (2012). What kinds of numbers do students assign to literal symbols? Aspects of the transition from arithmetic to algebra. Mathematical Thinking and Learning, 14(1), 1-27. doi: 10.1080/10986065.2012.625074
- Christou, K. P. Vosniadou, S., & Vamvakoussi, X. (2007). Students' interpretations of literal symbols in algebra. In S. Vosniadou, A. Baltas & X. Vamvakoussi (Eds.), Re-Framing the Conceptual Change Approach in Learning and Instruction (pp. 283-297): Elsevier Press.
- Fischbein, E. (1987). Intuition in science and mathematics. Dordrecht: Kluwer Academic Press.
- Ni, Y. J., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. Educational Psychologist, 40(1), 27-52. doi: 10.1207/s15326985ep4001_3
- Obersteiner, A., Van Hoof, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2015). Who can escape the natural number bias in rational number tasks? A study involving students and experts. British Journal of Psychology. doi: 10.1111/bjop.12161
- Vamvakoussi, X., Vosniadou, S., & Van Dooren, W. (2013). The framework theory approach applied to mathematics learning. In S. Vosniadou (Ed.), International Handbook of Research on Conceptual Change (2nd ed., pp. 305-321). New York: Routledge.
- Van Hoof, J., Vandewalle, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2015). In search for the natural number bias in secondary school students' interpretation of the effect of arithmetical operations. Learning and Instruction, 30, 30-38. doi: 10.1016/j.learninstruc.2014.03.004

προτεινόμενη βιβλιογραφία

για Εννοιολογική Αλλαγή στη μάθηση και τη διδασκαλία

- Carey, S. (2009). *The origin of concepts. New York: Oxford University Press*
- Chi M.T.H. (2008). Three Types of Conceptual Change: Belief Revision, Mental Model Transformation, and Categorical Shift. In S. Vosniadou (Ed.), 48, *International Handbook of Research on Conceptual Change. New York:* Routledge, pp. 61-82.
- Thagard, P. (1992). *Conceptual revolutions. Princeton, NJ: Princeton University* Press.
- Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. Learning and Instruction, 14, 453-467.
- Vosniadou, S., Ioannides, C., Dimitrakopoulou, A., & Papademitriou, E. (2001). Designing learning environments to promote conceptual change in science. Learning and Instruction, 11(4-5), 381-419.
- Vosniadou, S. (Ed.), (2008). Handbook of research on conceptual. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Βοσνιάδου, Σ. Βαμβακούση, Ξ., Σκοπελίτη, Ε (2008) Το πρόβλημα της εννοιολογικής αλλαγής στην ψυχολογία, Νόησης (στα ελληνικά)

προτεινόμενη βιβλιογραφία

για Ιστορικο-Πολιτισμική προσέγγιση στη διδασκαλία:

Davydov, V. V. (1991). On the objective origin of the concept of fractions. Focus on Learning Problems in Mathematics, 13(1), 13–64.

Davydov, V. V. (1992). The psychological analysis of multiplication procedures.Focus on Learning Problems in Mathematics, 14(1), 3–67.

Davydov, V. V., Gorbov, S. F., Mikulina, G. G., & Saveleva, O. V. (1999). Mathematics:Class 1. Binghamton: State University of New York.

Kozulin, A. (1990). Vygotsky's psychology: A biography of ideas. Cambridge, MA:Harvard University Press.

Leontiev, A. N. (1981). The problem of activity in psychology. In J. V. Wertsch (Ed.), The concept of activity in Soviet psychology (pp. 37–71). Armonk, NY: M. E. Sharpe.

Luria, A. R. (1981). Language and cognition. New York: John Wiley.

Schmittau, J. (1993a). Vygotskian scientific concepts: Implications for mathematics education. Focus on Learning Problems in Mathematics, 15(2–3), 29–39.

Schmittau, J. (2003a). Beyond constructivisim and back to basics: A cultural historical alternative to the teaching of the base ten positional system. In B. Rainforth & J. Kugelmass (Eds.), Curriculum *and instruction for all learners: Blending systematic and constructivist approaches in inclusive elementary schools* Baltimore, MD: Brookes Publishing Co.

Schmittau, J. (2003b). Cultural historical theory and mathematics education. In A. Kozulin, B. Gindis, S. Miller, & V. Ageyev (Eds.), Vygotsky's *educational theory in cultural context*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Vygotsky, L. S. (1986). Thought and language. Cambridge, MA: MITPress.

Vygotsky, L. S., & Luria, A. R. (1993). Studies on the history of behavior: Ape, primitive, and child. Hillsdale, NJ: Erlbaum.