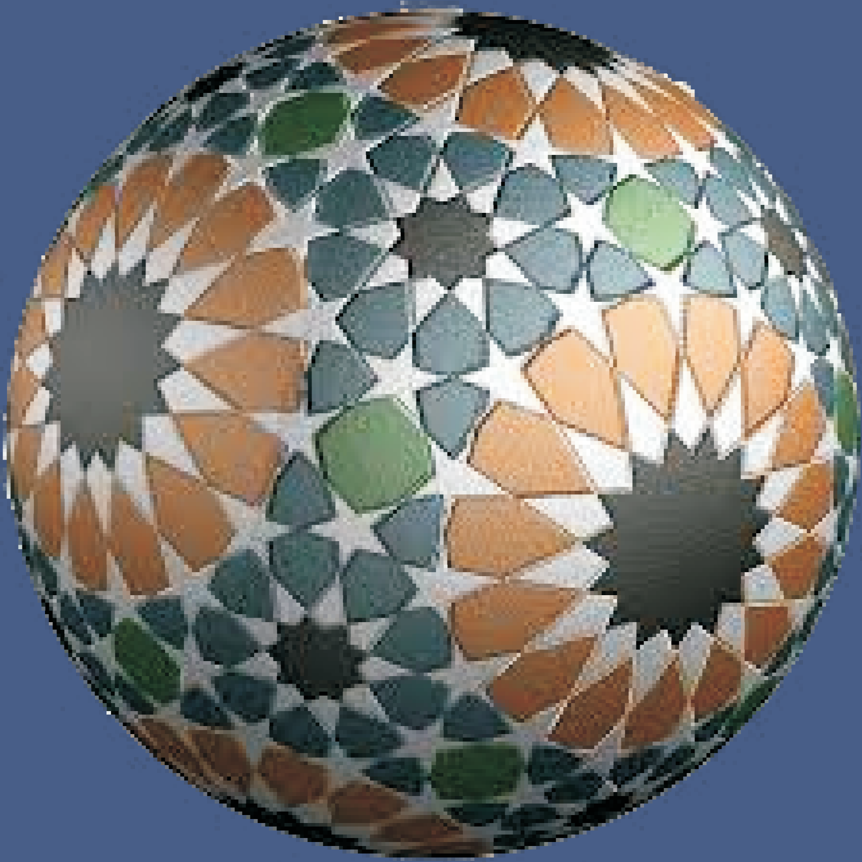
ΜΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΤΗ ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ



Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Πανεπιστημίου Μακεδονίας

ΜΙΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ
ΣΤΗ ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ερευνητική εργασία

στο πλαίσιο του project

"Η αναζήτηση της Μαθηματικής Αλήθειας"

Α΄ Λυκείου

Σχολικό έτος 2014-15

Οι Ομάδες Εργασίας

Ο Τόλης και τα Πειραματόζωα
ΑΡΓΥΡΟΣ ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ
ΓΑΛΑΝΟΠΟΥΛΟΣ ΑΓΓΕΛΟΣ
ΘΕΟΔΟΥΛΙΔΗΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ
ΚΑΡΑΚΑΡΗΣ ΣΤΑΥΡΟΣ

Mathematica
ΑΝΑΓΝΩΣΤΟΥ ΣΑΡΑΦΙΑΝΟΣ
ΓΑΒΡΙΔΗΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ
ΓΑΛΑΝΟΠΟΥΛΟΥ ΜΑΡΙΑ
ΠΑΡΑΣΧΑΚΗ ΕΥΓΕΝΙΑ

Οι Πιγκουίνοι
ΜΥΡΩΔΙΚΟΣ ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ
ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ ΞΕΝΟΦΩΝ
ΠΟΥΤΑΧΙΔΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ
ΣΙΔΕΡΑΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ

Οι Μούσες των Μαθηματικών
ΠΟΥΛΙΟΥ ΕΥΤΥΧΙΣ
ΜΑΡΑΝΤΙΔΟΥ ΧΡΙΣΤΙΝΑ
ΤΖΕΛΕΠΗ ΣΟΥΣΑΝΝΑ
ΤΣΑΛΚΙΤΖΙΔΟΥ ΣΟΦΙΑ
ΦΟΛΛΑ ΠΑΝΑΓΙΩΤΑ

Σχεδιασμός γραφικών
ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΠΟΥΤΑΧΙΔΗΣ
ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ ΑΡΓΥΡΟΣ

Υπ. Καθηγητής
ΝΙΚΟΣ ΤΕΡΨΙΑΔΗΣ
Μαθηματικός

Η ερευνητική εργασία

Στο πλαίσιο του project με θέμα την "Αναζήτηση της μαθηματικής αλήθειας" που πραγματοποιήθηκε στο Πρότυπο Πειραματικό Λύκειο του Πανεπιστημίου Μακεδονίας τη σχολική χρονιά 2014-15, κάναμε μία προσπάθεια να διερευνήσουμε ερωτήματα που σχετίζονται με τη φύση της μαθηματικής αλήθειας και την εγκυρότητα των μαθηματικών προτάσεων. Τα μαθηματικά αντικείμενα, υπάρχουν σε έναν δικό τους κόσμο ιδεών, έξω από τον άνθρωπο ή είναι επινοήσεις και κατασκευές του ανθρώπινου πολιτισμού; Οι μαθηματικές ιδέες ανακαλύπτονται ή επινοούνται;

Η μαθηματική επιστήμη είναι κατοχυρωμένη στην κοινή συνείδηση ως μία επιστήμη απόλυτη που τα συμπεράσματά της αποτελούν αλήθειες αιώνιες, οριστικές, αδιάψευστες και κατά συνέπεια στατικές. Η ιδεαλιστική άποψη του Πλάτωνα, ότι τα μαθηματικά αντικείμενα ζουν σε έναν δικό τους τέλειο κόσμο και ότι τα αντικείμενα του πραγματικού κόσμου δεν είναι παρά ατελείς προσεγγίσεις τους, είναι ιδιαίτερα ελκυστική και πολύ διαδεδομένη ακόμη και σήμερα. Αυτή η γνώμη για τη φύση των μαθηματικών, επιβάλλει και μία αντίστοιχη ιδέα για τον τρόπο με τον οποίο μπορεί ο άνθρωπος να προσεγγίσει τη γνώση. Αυτή η φύση των μαθηματικών αντικειμένων συνεπάγεται ότι οι μαθηματικές ιδέες είναι έμφυτες στον ανθρώπινο νου και ο άνθρωπος μπορεί να προσεγγίσει τη γνώση μέσα από μία διαδικασία ανακάλυψης των ιδεατών μαθηματικών οντοτήτων.

Όμως, η εξέλιξη της επιστήμης έχει δημιουργήσει αμφιβολίες για την εγκυρότητα της παραπάνω άποψης και έχει πυροδοτήσει νέες οπτικές για να γίνει δυνατό να εξηγηθούν οι αντιφάσεις που δημιουργούνται μεταξύ των κατεστημένων φιλοσοφικών ιδεών και των νέων επιστημονικών εξελίξεων. Υπάρχουν επιστήμονες και φιλόσοφοι που αντιμετωπίζουν με μία άλλη ματιά τον τρόπο με τον οποίο δημιουργείται η επιστημονική γνώση. Υπάρχουν απόψεις που υποστηρίζουν ότι οι μαθηματικές αλήθειες δεν είναι οριστικές ούτε απόλυτες, είναι διαψεύσιμες και σχετικές και κατά συνέπεια είναι δυναμικές, καταρρίπτονται και αντικαθίστανται από νέες.

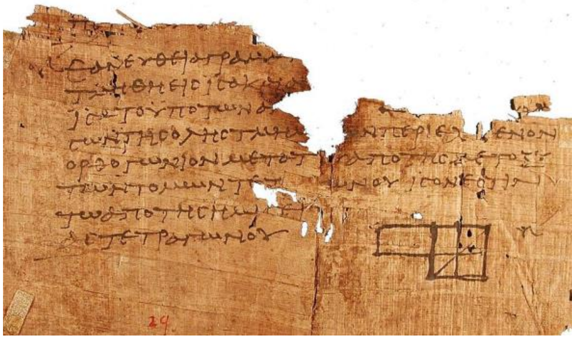
Υπάρχουν μαθηματικές ιδέες που διδασκόμαστε στη σχολική ύλη, οι οποίες φαντάζουν τόσο αυτονόητες που κανείς δεν θα έμπαινε στη διαδικασία να διερωτηθεί για την εγκυρότητά τους. Μαθηματικές προτάσεις που διατυπώθηκαν από τον Ευκλείδη, όπως οι παρακάτω:

"Μία ευθεία μπορεί να προεκταθεί απεριόριστα προς τις δύο κατευθύνσεις της."

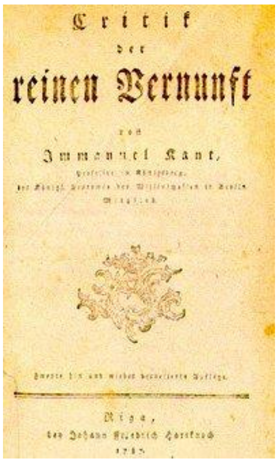
"Από ένα σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική παράλληλη στην ευθεία."

"Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές ή 180 μοίρες."

θα τις θεωρούσαμε αδιαμφισβήτητα ορθές γιατί συμφωνούν με την εμπειρία μας.

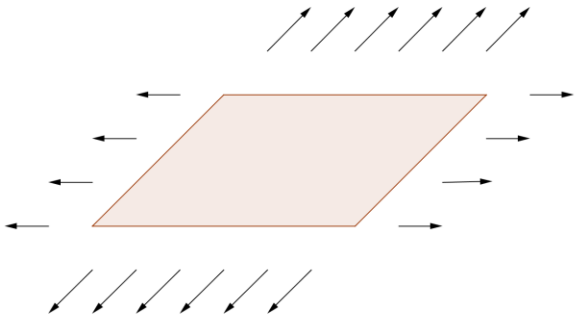



Η αντίληψη ότι ο χώρος επεκτείνεται ευθύγραμμα, ομοιόμορφα και απεριόριστα προς όλες τις κατευθύνσεις, που κρύβεται στο υπόβαθρο της γεωμετρίας του Ευκλείδη, είναι τόσο ισχυρή, ώστε πολλούς αιώνες αργότερα, ο Γερμανός φιλόσοφος Immanuel Kant θεώρησε θεμελιώδες ότι ο χώρος είναι a-priori ευκλείδειος.

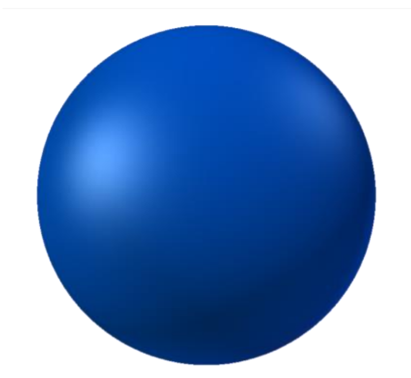


Ευκλείδεια και σφαιρική γεωμετρία

Εμείς, λοιπόν, πειραματιστήκαμε στην επιφάνεια της σφαίρας για να διερευνήσουμε την απόλυτη ισχύ προφανών προτάσεων όπως οι παραπάνω. Η γεωμετρία δύο διαστάσεων του Ευκλείδη πραγματοποιείται στο επίπεδο, το οποίο είναι μία επιφάνεια άπειρη και απεριόριστη, δηλαδή χωρίς όρια.

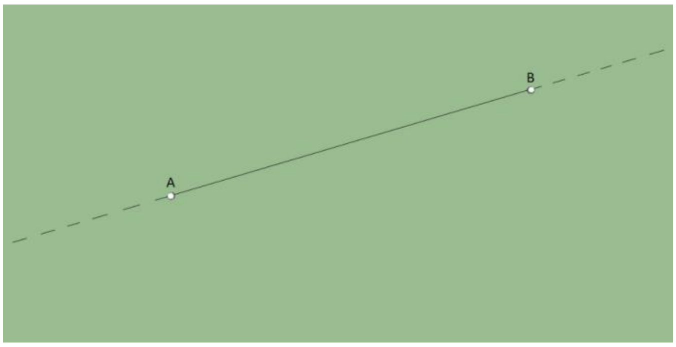


Αντίστοιχα, η σφαιρική γεωμετρία δύο διαστάσεων υλοποιείται στην επιφάνεια της σφαίρας, μία επιφάνεια που είναι σαφώς πεπερασμένη και ταυτόχρονα απεριόριστη, αφού είναι γεγονός ότι δεν έχει όρια.

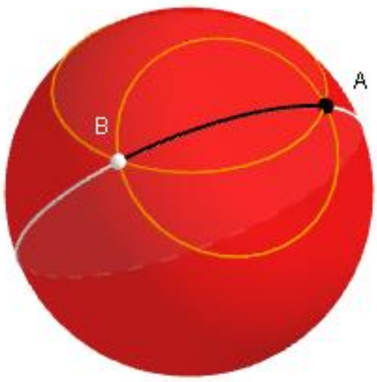


Ήδη παρατηρούμε ότι οι έννοιες άπειρη και απεριόριστη που εύκολα θα υποστηρίζαμε ότι είναι ταυτόσημες, δεν είναι ταυτόσημες όταν αναφερόμαστε στην επιφάνεια της σφαίρας. Είναι λοιπόν δυνατόν να υπάρχει μία επιφάνεια πεπερασμένη και ταυτόχρονα χωρίς όρια.

Η έννοια του σημείου είναι ταυτόσημη στην επίπεδη και στη σφαιρική γεωμετρία, δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με την έννοια της ευθείας. Η ευθεία στην Ευκλείδεια γεωμετρία υλοποιεί την έννοια της συντομότερης διαδρομής ανάμεσα σε δύο σημεία Α και Β και όπως είδαμε παραπάνω, μπορεί να επεκταθεί απεριόριστα προς τις δύο κατευθύνσεις της.



Για να αντιληφθούμε τι είναι η ευθεία στη σφαιρική γεωμετρία θα προσπαθήσουμε να υλοποιήσουμε την έννοια της συντομότερης διαδρομής ανάμεσα σε δύο σημεία Α και Β στην επιφάνεια της σφαίρας. Όπως φαίνεται και στο σχήμα, τα δύο σημεία Α και Β είναι δυνατόν να ενωθούν με τόξα διάφορων κύκλων. Παρατηρούμε ότι όσο μικρότερος είναι ο κύκλος, τόσο μεγαλύτερο είναι το τόξο που ενώνει τα Α και Β. Το μικρότερο από όλα τα τόξα κύκλων που ενώνουν τα σημεία Α και Β είναι το τόξο που αντιστοιχεί στον μεγαλύτερο δυνατό κύκλο που μπορεί να γραφεί στην επιφάνεια της σφαίρας και για τον λόγο αυτό λέγεται μέγιστος κύκλος. Συνεπώς, το αντίστοιχο της ευθείας στην επιφάνεια της σφαίρας είναι ο μέγιστος κύκλος που έχει την ιδιότητα να χωρίζει τη σφαίρα σε δύο ίσα ημισφαίρια. Η ευθεία, λοιπόν, της σφαιρικής γεωμετρίας, είναι και αυτή πεπερασμένη αλλά ταυτόχρονα απεριόριστη, εφόσον δεν έχει όρια.

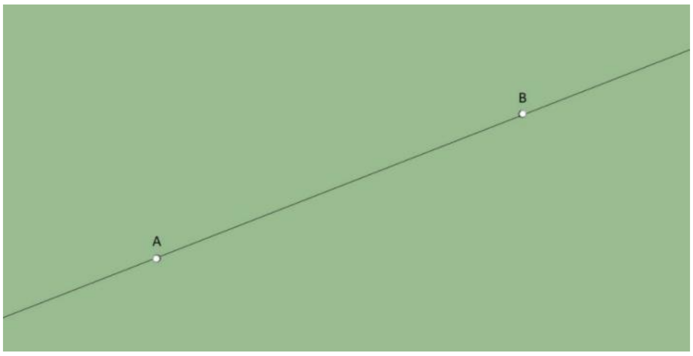


Ισχύουν τα αξιώματα της Ευκλείδειας στη σφαιρική γεωμετρία;

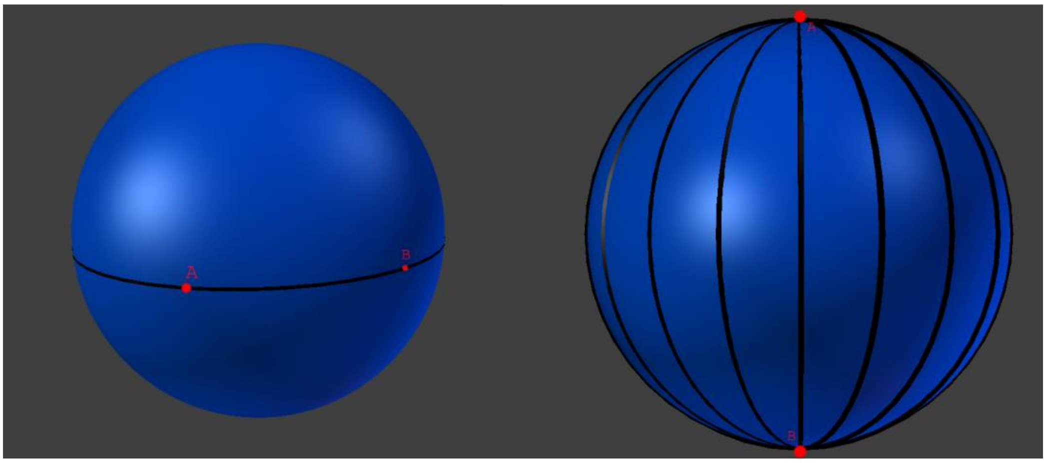
Ας δούμε λοιπόν αν ισχύουν τα αξιώματα της ευκλείδειας γεωμετρίας στη σφαιρική γεωμετρία.

1ο αξίωμα

Ευκλείδεια γεωμετρία: Από κάθε σημείο μπορούμε να φέρουμε μία ευθεία που να το συνδέει με οποιοδήποτε σημείο. Δηλαδή από δύο σημεία περνάει μία μοναδική ευθεία.

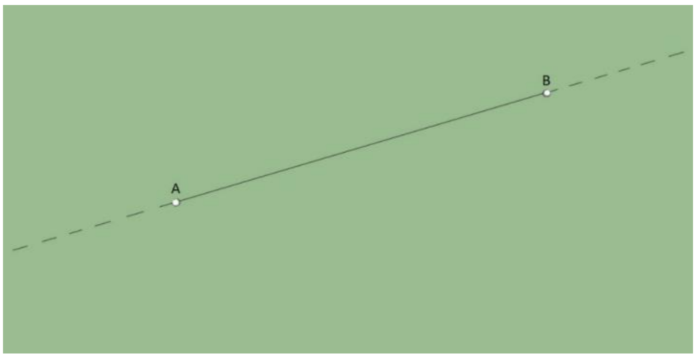


Σφαιρική γεωμετρία: Από δύο σημεία περνάει μία ευθεία (μέγιστος κύκλος), εκτός αν τα σημεία είναι αντίποδες, οπότε από αυτά τα σημεία διέρχονται άπειρες ευθείες (μέγιστοι κύκλοι).

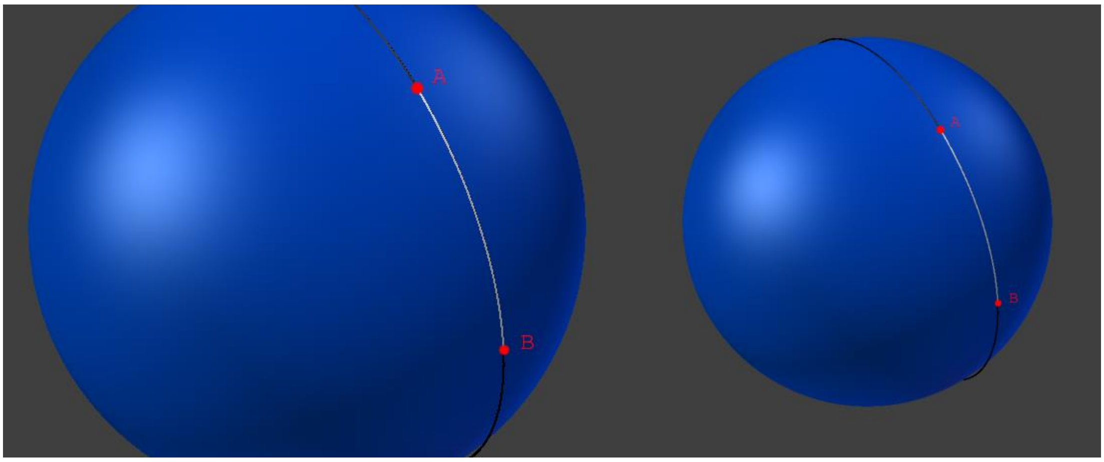


2ο αξίωμα

Ευκλείδεια γεωμετρία: Κάθε πεπερασμένη ευθεία (τμήμα) μπορεί να επεκτείνεται συνεχώς και ευθυγράμμως.

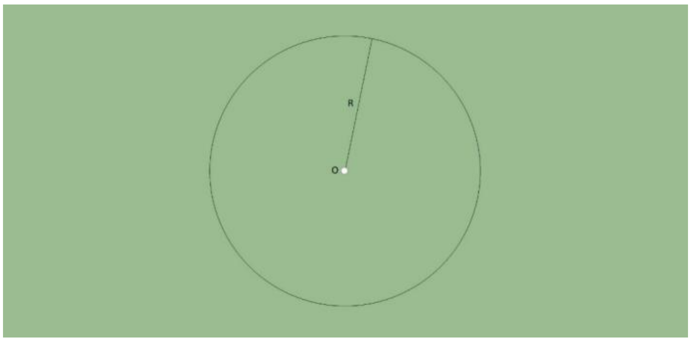


Σφαιρική γεωμετρία: Κάθε τμήμα (τόξο μέγιστου κύκλου) μπορεί να επεκταθεί μέχρι να γίνει μέγιστος κύκλος, άρα δεν μπορεί να επεκταθεί απεριόριστα.

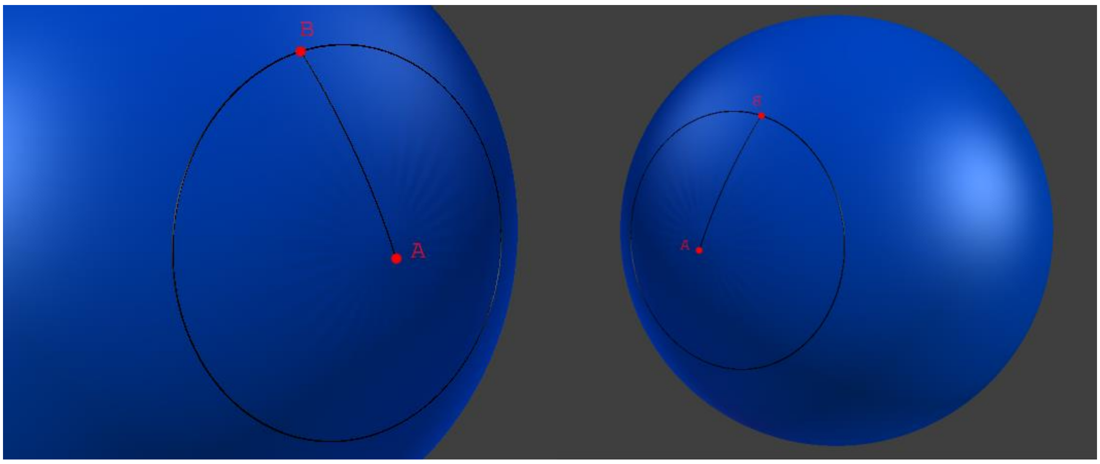


3ο αξίωμα

Ευκλείδεια γεωμετρία: Με κάθε κέντρο και κάθε ακτίνα μπορεί να γραφεί κύκλος.

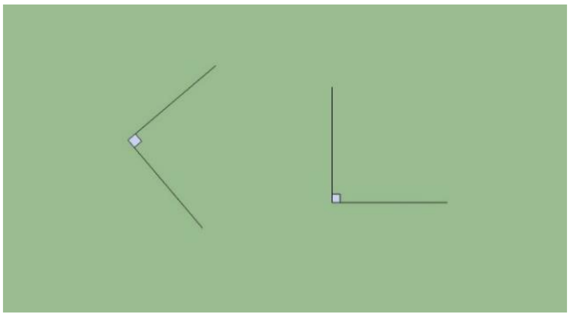


Σφαιρική γεωμετρία: Με κάθε κέντρο και ακτίνα μικρότερη του μισού του μέγιστου κύκλου μπορεί να γραφεί κύκλος.

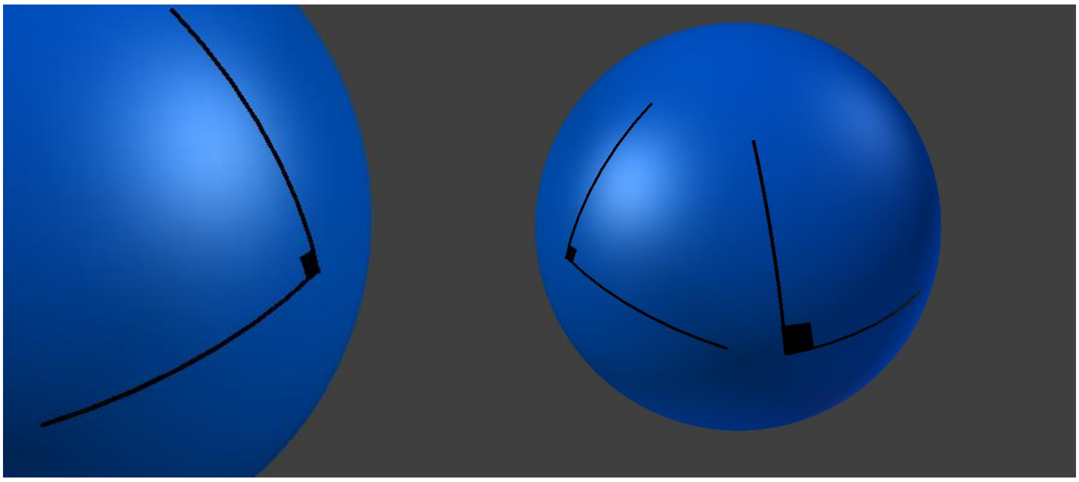


4ο αξίωμα

Ευκλείδεια γεωμετρία: Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.

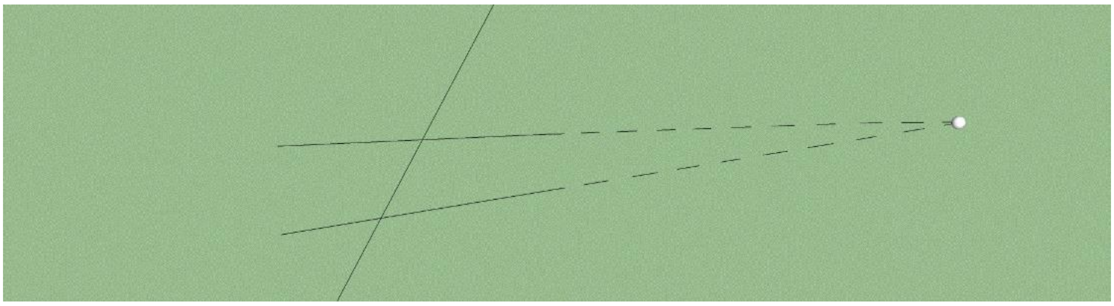


Σφαιρική γεωμετρία: Όλες οι ορθές γωνίες είναι ίσες μεταξύ τους.



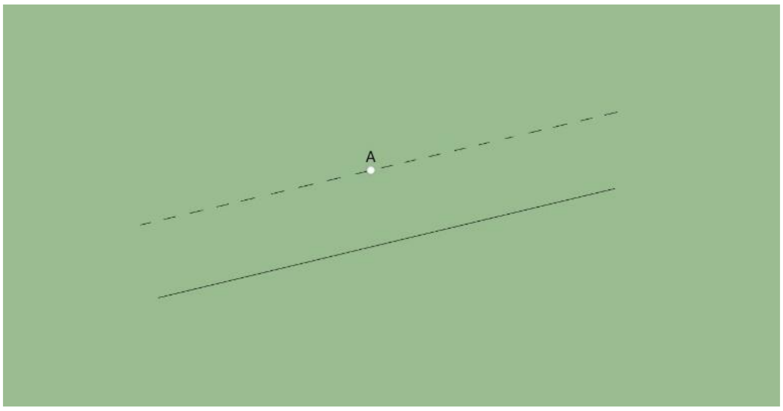
5ο αξίωμα

Ευκλείδεια γεωμετρία: Αν ευθεία που τέμνει δύο άλλες ευθείες και σχηματίζει τις εντός και επί τα αυτά γωνίες μικρότερες των δύο ορθών, τότε αν οι δύο ευθεί-ες προεκταθούν απεριόρι-στα θα συμπέσουν προς το μέρος που βρίσκονται οι μικρότερες των δύο ορθών.

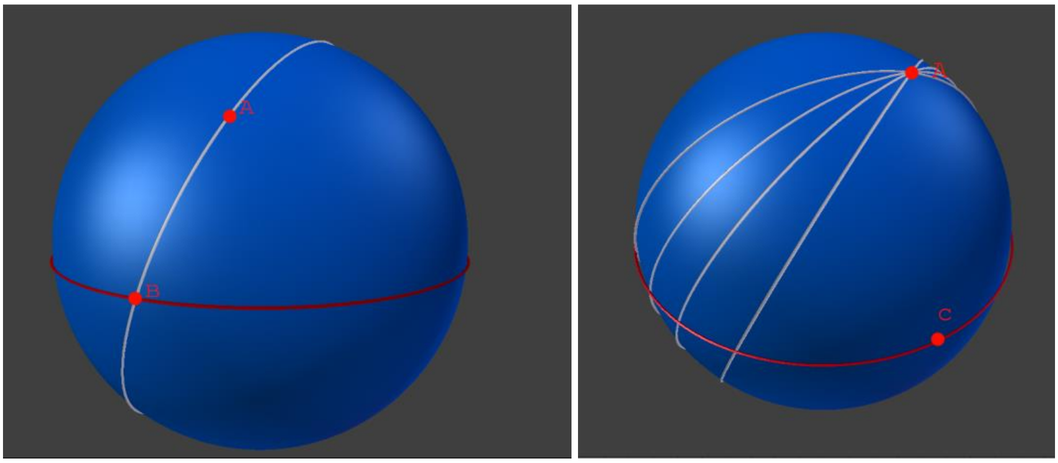


Ισοδύναμο 5^{ου} αξιώματος

Ευκλείδεια γεωμετρία: Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική παράλληλη προς την ευθεία.



Σφαιρική γεωμετρία: Από σημείο εκτός ευθείας (μέγιστου κύκλου) δεν διέρχεται καμία παράλληλη. Αυτό έχει ως συνέπεια ότι δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες στη σφαιρική γεωμετρία.

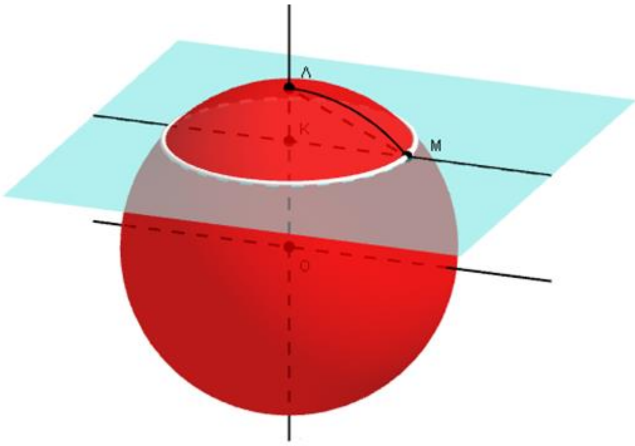


Σύγκριση προτάσεων στην Ευκλείδεια και στη σφαιρική γεωμετρία

Μήκος κύκλου

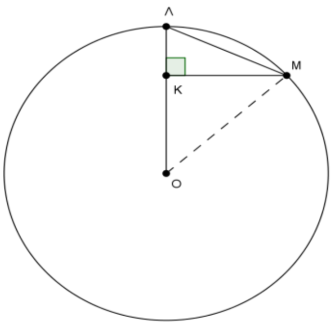
Η μέτρηση του κύκλου αποτελεί ένα κεντρικό θέμα της γεωμετρίας από την αρχαιότητα και συνδέεται με την ιστορική εξέλιξη του αριθμού π. Υπάρχουν αναφορές στα βαβυλωνιακά και στα αιγυπτιακά μαθηματικά. Πολλοί σημαντικοί αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί, από τον Θαλή μέχρι τον Αρχιμήδη, ασχολήθηκαν με τη μέτρηση του κύκλου.

Στην Ευκλείδεια γεωμετρία, ισχύει η πρόταση "η περίμετρος ενός κύκλου είναι ίση με 2π επί την ακτίνα του". Θα εξετάσουμε αν η πρόταση αυτή ισχύει και στη σφαιρική γεωμετρία. Η διαφορά του σφαιρικού κύκλου από τον επίπεδο κύκλο της ευκλείδειας γεωμετρία, είναι η ακτίνα του. Στον επίπεδο κύκλο, η ακτίνα είναι ευθύγραμμο τμήμα. Στον σφαιρικό κύκλο, η ακτίνα είναι τόξο. Το σχήμα του κύκλου, όμως, δεν αλλοιώνεται στη σφαιρική γεωμετρία, όπως συμβαίνει με τις ευθείες, τα ευθύγραμμα τμήματα και τα τρίγωνα.



Στο παραπάνω σχήμα, ο κύκλος θα μπορούσε να θεωρηθεί κύκλος της επίπεδης Ευκλείδειας γεωμετρίας και κύκλος της σφαιρικής γεωμετρίας. Ως κύκλος της επίπεδης Ευκλείδειας γεωμετρίας, έχει κέντρο το σημείο Κ και ακτίνα το τμήμα ΚΜ. Ως κύκλος της σφαιρικής γεωμετρίας, έχει κέντρο το σημείο Λ και ακτίνα το τόξο ΛΜ. Ως κύκλος της επίπεδης Ευκλείδειας γεωμετρίας θα έχει περίμετρο ίση με 2π επί την ακτίνα του ΚΜ. Δηλαδή, θα είναι:

$$\text{Περίμετρος} = 2\pi \cdot \text{ΚΜ}$$



Το ερώτημα προς διερεύνηση είναι αν η περίμετρος του σφαιρικού κύκλου είναι ίση με 2π επί την ακτίνα του, που είναι το τόξο ΑΜ, δηλαδή αν θα ισχύει:

$$\text{Περίμετρος} \overset{?}{=} 2\pi \cdot \text{τόξο}(\text{ΛΜ})$$

Κάθε χορδή είναι μικρότερη από το αντίστοιχο τόξο της, άρα:

$$ΛΜ < \text{τόξο}(ΛΜ)$$

Επίσης, το κάθετο τμήμα από ένα σημείο προς ευθεία είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο τμήμα από το σημείο προς την ευθεία, άρα:

$$ΚΜ < ΛΜ$$

Οπότε, θα ισχύει ότι:

$$ΚΜ < \text{τόξο}(ΛΜ)$$

$$2π \cdot ΚΜ < 2π \cdot \text{τόξο}(ΛΜ)$$

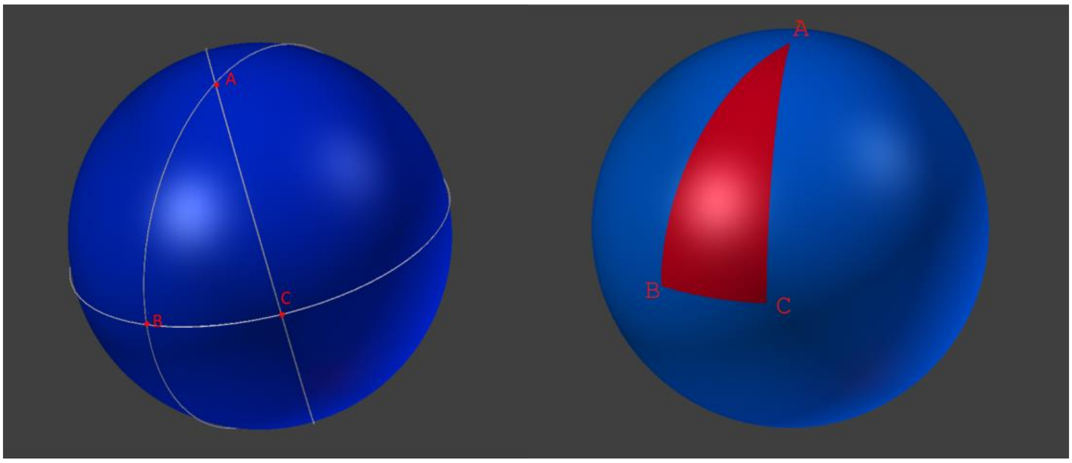
$$\text{Περίμετρος} < 2π \cdot \text{τόξο}(ΛΜ)$$

Διαπιστώνουμε, λοιπόν, ότι η Περίμετρος ενός σφαιρικού κύκλου δεν είναι ίση αλλά μικρότερη από 2π επί την ακτίνα του. Συνεπώς, η πρόταση της Ευκλείδειας γεωμετρίας "η περίμετρος ενός κύκλου είναι ίση με 2π επί την ακτίνα του", δεν ισχύει στη σφαιρική γεωμετρία.

Η άτρακτος και το σφαιρικό τρίγωνο

Πως φτιάχνουμε, όμως, άλλα σχήματα εκτός του κύκλου στη σφαιρική γεωμετρία; Για παράδειγμα, πως κατασκευάζουμε πολύγωνα; Ας ξεκινήσουμε με την πιο απλή μορφή πολυγώνου, που είναι το τρίγωνο.

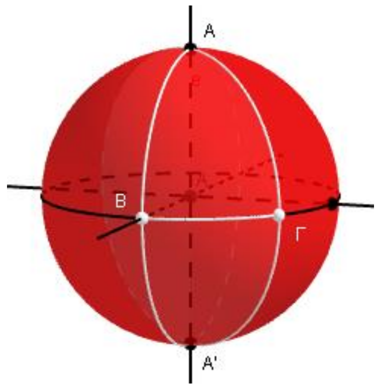
Ένα σφαιρικό τρίγωνο δημιουργείται με την ίδια λογική που δημιουργείται και ένα τρίγωνο στην Ευκλείδεια γεωμετρία, δηλαδή ενώνοντας τρία σημεία Α, Β και Γ μέσω της συντομότερης διαδρομής, δηλαδή με ευθείες γραμμές. Αφού στη σφαιρική γεωμετρία, οι ευθείες γραμμές είναι μέγιστοι κύκλοι, θα πρέπει να ενώσουμε τα σημεία Α, Β και Γ με μέγιστους κύκλους.



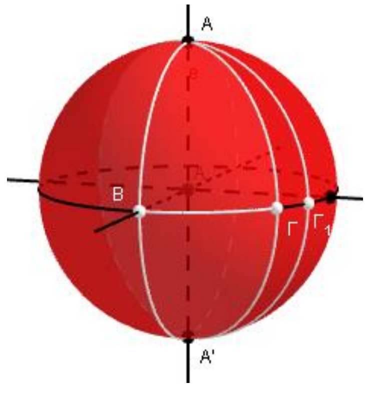
Ενώνουμε, κατ' αρχήν, τα σημεία Α και Β με έναν μέγιστο κύκλο και τα σημεία Α και Γ με έναν μέγιστο κύκλο. Οι δύο μέγιστοι κύκλοι έχουν κοινό, εκτός από το σημείο Α, και ένα σημείο Α΄, που είναι ο αντίποδας του Α. Το καμπυλόγραμμο σχήμα που σχηματίζεται με κορυφές τα Α και Α΄, λέγεται άτρακτος. Είναι ένα πολύ ενδιαφέρον σχήμα, γιατί ανατρέπει ένα γεγονός της Ευκλείδειας γεωμετρίας, ότι χρειάζονται τουλάχιστον τρεις γραμμές για να δημιουργηθεί ένα κλειστό σχήμα. Στη σφαιρική γεωμετρία, είναι δυνατόν να δημιουργηθεί ένα κλειστό σχήμα με δύο μόνον γραμμές. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι δύο αναγκαστικά τεμνόμενοι (σύμφωνα με το 5ο αξίωμα) μέγιστοι κύκλοι, χωρίζουν την επιφάνεια της σφαίρας σε τέσσερις ατράκτους, οι οποίες είναι ανά δύο ίσες. Για να ολοκληρωθεί το σφαιρικό τρίγωνο, πρέπει να ενώσουμε και τα σημεία Β και Γ με έναν μέγιστο κύκλο. Ο τρίτος μέγιστος κύκλος χωρίζει κάθε μία από τις τέσσερις ατράκτους σε δύο σφαιρικά τρίγωνα, οπότε, με αυτό τον τρόπο η επιφάνεια της σφαίρας έχει χωριστεί σε οκτώ σφαιρικά τρίγωνα, τα οποία, μάλιστα, είναι ανά δύο ίσα.

Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου

Μία από τις βασικές προτάσεις της Ευκλείδειας γεωμετρίας, είναι ότι "το άθροισμα των γωνιών οποιουδήποτε τριγώνου είναι ίσο με π ακτίνια, ή 180 μοίρες". Εύλογα αναδύεται το ερώτημα αν ισχύει το ίδιο και στη σφαιρική γεωμετρία. Προκειμένου να ανιχνεύσουμε τις δυνατότητες που υπάρχουν, κατασκευάζουμε ένα σφαιρικό τρίγωνο ως εξής. Παίρνουμε δύο τεμνόμενους μέγιστους κύκλους, τους οποίους θεωρούμε όπως τους μεσημβρινούς της γης. Τα σημεία Α και Α΄, στα οποία τέμνονται οι δύο κύκλοι, τα θεωρούμε όπως τους πόλους της γης. Ένα τρίτος μέγιστος κύκλος, στη θέση του ισημερινού της γης, τέμνει τους δύο άλλους κύκλους στα σημεία Β και Γ, δημιουργώντας το σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ. Επειδή οι μεσημβρινοί της γης είναι κάθετοι στον ισημερινό, το σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ θα έχει δύο ορθές γωνίες, τις Β και Γ, οπότε το άθροισμα των γωνιών του θα είναι μεγαλύτερο του π ή των 180 μοιρών.



Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι στη σφαιρική γεωμετρία υπάρχει τρίγωνο που το άθροισμα των γωνιών του υπερβαίνει τις 180 μοίρες. Μάλιστα, μπορούμε εύλογα να υποθέσουμε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός σφαιρικού τριγώνου δεν είναι ίσο με κάτι σταθερό (όπως στην Ευκλείδεια γεωμετρία), γιατί καθώς το σημείο Γ κινείται πάνω στον ισημερινό της σφαίρας και απομακρύνεται από το σημείο Β, η γωνία Α μεγαλώνει, οπότε και το άθροισμα των γωνιών του σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ μεγαλώνει αντίστοιχα.

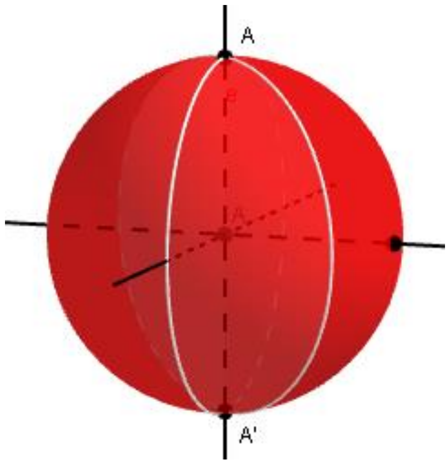


Εύλογα όμως τώρα θα αναρωτηθούμε, αν το συμπέρασμα ότι το άθροισμα των γωνιών του σφαιρικού τριγώνου είναι μεγαλύτερο του π ή των 180 μοιρών, ισχύει για όλα τα σφαιρικά τρίγωνα ή αν υπάρχουν τρίγωνα για τα οποία δεν ισχύει. Για να καταλήξουμε σε ένα ασφαλές συμπέρασμα θα πρέπει να βρούμε έναν τύπο που να δίνει το άθροισμα των γωνιών ενός σφαιρικού τριγώνου. Αυτό το συμπέρασμα, προκύπτει σχετικά αναπάντεχα, μέσα από την προσπάθεια υπολογισμού του εμβαδού του σφαιρικού τριγώνου.

Το θεώρημα του Girard

Υπολογισμός του εμβαδού της ατράκτου

Θα υπολογίσουμε το εμβαδό μιας ατράκτου αναλογικά προς το εμβαδό της σφαίρας. Γνωρίζουμε ότι το εμβαδό της σφαίρας είναι ίσο με $4\pi R^2$ οπότε το εμβαδό του ημισφαιρίου θα είναι ίσο με το μισό του εμβαδού της σφαίρας, δηλαδή $2\pi R^2$. Το εμβαδό μιας ατράκτου είναι τόσο μεγαλύτερο όσο μεγαλύτερη είναι η γωνία που σχηματίζουν μεταξύ τους οι δύο μέγιστοι κύκλοι που δημιουργούν την άτρακτο.



Για να βρούμε το εμβαδό μιας ατράκτου, σκεπτόμαστε αναλογικά. Αν χωρίσουμε το ημισφαίριο σε κ ίσες ατράκτους, τότε το εμβαδό κάθε μιας από αυτές θα είναι ίσο με $\frac{2\pi R^2}{\kappa}$. Οπότε, αν πάρουμε λ τέτοιες στοιχειώδεις ατράκτους, τότε το εμβαδό της ατράκτου που σχηματίζεται θα είναι ίσο με λ φορές το εμβαδό της στοιχειώδους ατράκτου, δηλαδή θα είναι

$$E_{\text{ατράκτου}} = \lambda \cdot \frac{2\pi R^2}{\kappa} = \frac{2\pi\lambda R^2}{\kappa}$$

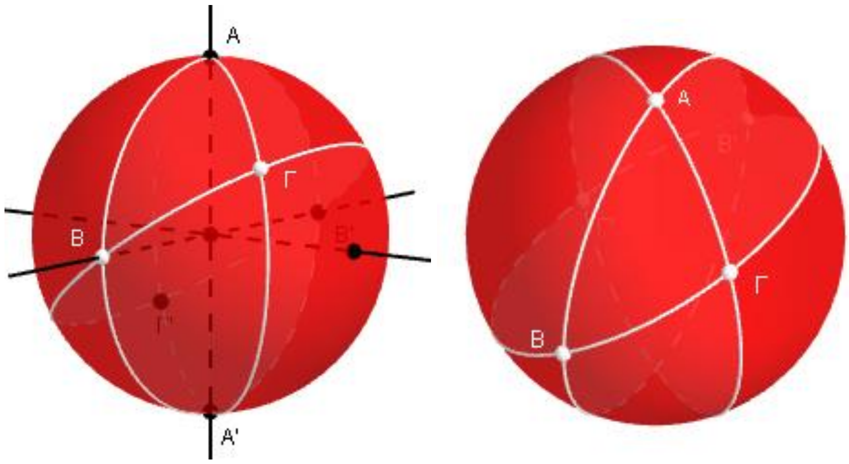
Όμως, το πηλίκο $\frac{\pi\lambda}{\kappa}$ εκφράζει τη γωνία Α της ατράκτου, οπότε μπορούμε να πούμε ότι το εμβαδό της ατράκτου είναι ίσο με $2R^2A$:

$$E_{\text{ατράκτου}} = 2R^2A$$

όπου Α είναι η γωνία της ατράκτου.

Υπολογισμός του εμβαδού ενός σφαιρικού τριγώνου

Οι τρεις μέγιστοι κύκλοι του σχήματος τέμνονται στα σημεία Α, Β και Γ καθώς και στους αντίποδες αυτών των σημείων Α′, Β′, Γ′. Έτσι, σχηματίζον το σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ καθώς και το Α′Β′Γ′, που το ίσο με το ΑΒΓ και δημιουργείται ως τρίγωνο-αντίποδας του ΑΒΓ. Παρατηρούμε ότι το σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ περιέχεται σε τρεις ατράκτους, μία άτρακτο με κορυφή το Α (ας την ονομάσουμε L_A), μία άτρακτο με κορυφή το Β (ας την ονομάσουμε L_B) και μία άτρακτο με κορυφή το Γ (ας την ονομάσουμε L_Γ). Αντίστοιχα, το σφαιρικό τρίγωνο-αντίποδας Α′Β′Γ′, περιέχεται στις άλλες τρεις ατράκτους, μία άτρακτο με κορυφή το Α′ (ας την ονομάσουμε $L_{A'}$), μία άτρακτο με κορυφή το Β′ (ας την ονομάσουμε $L_{B'}$) και μία άτρακτο με κορυφή το Γ′ (ας την ονομάσουμε $L_{\Gamma'}$).



Λαμβάνοντας υπόψιν τις τρεις παρακάτω παρατηρήσεις:

- Το σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ περιέχεται στις ατράκτους L_A, L_B και L_Γ και δεν περιέχεται στις ατράκτους $L_{A'}$, $L_{B'}$ και $L_{\Gamma'}$.
- Το σφαιρικό τρίγωνο Α’Β’Γ’ περιέχεται στις ατράκτους $L_{A'}$, $L_{B'}$ και $L_{\Gamma'}$ και δεν περιέχεται στις ατράκτους L_A, L_B και L_Γ.
- Κάθε σημείο της σφαίρας που δεν ανήκει στο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ ή στο σφαιρικό τρίγωνο Α’Β’Γ’, ανήκει σε μία μόνο άτρακτο.

μπορούμε να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι οι έξι άτρακτοι L_A, L_B, L_Γ, $L_{A'}$, $L_{B'}$ και $L_{\Gamma'}$ καλύπτουν όλη την επιφάνεια της σφαίρας, έχοντας όμως καλύψει τις επιφάνειες των δύο σφαιρικών τριγώνων ΑΒΓ και Α’Β’Γ’, τρεις φορές το καθένα. Άρα, το άθροισμα των εμβαδών των έξι ατράκτων L_A, L_B, L_Γ, $L_{A'}$, $L_{B'}$ και $L_{\Gamma'}$, θα είναι ίσο με την επιφάνεια της σφαίρας, συν δύο φορές τα εμβαδά των δύο σφαιρικών τριγώνων ΑΒΓ και Α’Β’Γ’.

Δηλαδή:

$$L_A + L_B + L_\Gamma + L_{A'} + L_{B'} + L_{\Gamma'} = E_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma} + 2(\mathrm{AB\Gamma}) + 2(\mathrm{A'B'\Gamma'})$$

Όμως, οι άτρακτοι L_A και $L_{A'}$ είναι ίσες, οι άτρακτοι L_B και $L_{B'}$ είναι ίσες και οι άτρακτοι L_Γ και $L_{\Gamma'}$ είναι ίσες. Επίσης, και τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α’Β’Γ’ είναι ίσα. Οπότε η παραπάνω σχέση μπορεί να γίνει:

$$2L_A + 2L_B + 2L_G = E_{\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma} + 4(\mathrm{AB\Gamma})$$

Αν αντικαταστήσουμε τα εμβαδά των ατράκτων και το εμβαδό της σφαίρας, θα έχουμε:

$$2\cdot 2R^2A + 2\cdot 2R^2B + 2\cdot 2R^2\Gamma = 4\pi R^2 + 4(\mathrm{AB\Gamma})$$

$$4R^2A + 4R^2B + 4R^2\Gamma = 4\pi R^2 + 4(AB\Gamma)$$

$$R^2A + R^2B + R^2\Gamma = \pi R^2 + (AB\Gamma)$$

Η σχέση αυτή μπορεί να λυθεί είτε ως προς το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ, είτε ως προς το άθροισμα των γωνιών του σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ. Αν λύσουμε ως προς το εμβαδό του ΑΒΓ θα έχουμε:

$$(AB\Gamma) = R^2A + R^2B + R^2\Gamma - \pi R^2$$

$$(AB\Gamma) = R^2\,(A + B + \Gamma - \pi)$$

Η παρένθεση εκφράζει το ποσό κατά το οποίο το άθροισμα των γωνιών του σφαιρικού τριγώνου υπερβαίνει τα π ακτίνια (που είναι το άθροισμα των γωνιών ενός επίπεδου τριγώνου της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Οπότε, αυτή η σχέση δείχνει ότι το εμβαδό ενός σφαιρικού τριγώνου εξαρτάται από το άθροισμα των γωνιών του. Όσο μεγαλύτερο είναι το άθροισμα των γωνιών του, τόσο μεγαλύτερο θα είναι το εμβαδό του.

Αν λύσουμε την παραπάνω σχέση ως προς το άθροισμα των γωνιών του σφαιρικού τριγώνου, θα έχουμε:

$$R^2A + R^2B + R^2\Gamma = \pi R^2 + (AB\Gamma)$$

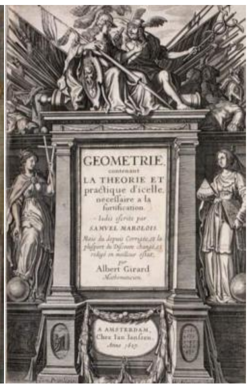
$$R^2\,(A + B + \Gamma) = \pi R^2 + (AB\Gamma)$$

$$A + B + \Gamma = \pi + \frac{1}{R^2}\,(AB\Gamma)$$

Αυτή η σχέση δείχνει ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε σφαιρικού τριγώνου υπερβαίνει τα π ακτίνια (δηλαδή τις 180^o). Το πόσο υπερβαίνει τις 180^o εξαρτάται από το εμβαδό του. Άρα, καταλήγουμε στο συμπέρασμα, ότι στη σφαιρική γεωμετρία, το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου δεν είναι ίσο με 180^o, όπως συμβαίνει στην Ευκλείδεια γεωμετρία. Είναι πάνω από 180^o και μάλιστα δεν είναι σταθερό, αλλά γίνεται μεγαλύτερο καθώς αυξάνει το εμβαδό του.

Ο Albert Girard

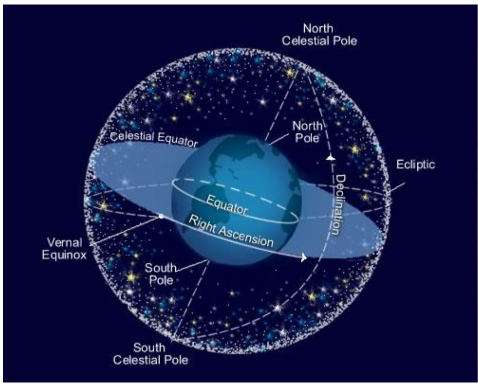
Το παραπάνω θεώρημα είναι γνωστό ως θεώρημα του Girard. Δημοσιεύτηκε από τον Albert Girard το 1626. Ο Girard ήταν Γάλλος μαθηματικός και μουσικός. Είχε μεγάλο ενδιαφέρον για τις στρατιωτικές εφαρμογές των μαθηματικών, για τις οχυρώσεις και για τη μηχανική.



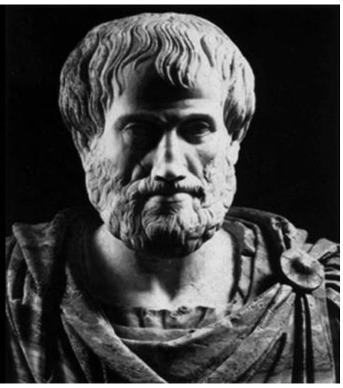
Γιατί σφαιρική γεωμετρία;

Για ποιόν λόγο, όμως, να μπούμε στη διαδικασία να κάνουμε γεωμετρία πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας, όταν έχουμε ως αποτέλεσμα μία θεωρία που φαίνεται να έρχεται σε αντίθεση με τα δεδομένα της εμπειρίας μας και με την κοινή λογική; Εμείς το ξεκινήσαμε σαν νοητικό πείραμα-παιχνίδι, αλλά η δημιουργία και η εξέλιξή της ιστορικά είχε συγκεκριμένα ερείσματα.

Η πρώτη αφορμή φαίνεται να προέρχεται από την αστρονομία. Η παρατηρησιακή αστρονομία αναπτύχθηκε πολύ νωρίς. Ήδη από τους πολιτισμούς των Βαβυλωνίων και των Αιγυπτίων δημιουργήθηκαν ανάγκες για την μέτρηση των εποχών και για δημιουργία ημερολογίου καθώς και για ταξίδια στην ξηρά και στη θάλασσα και η αστρονομία έδωσε λύσεις σε τέτοια θέματα. Η παρατηρησιακή αστρονομία από τότε έως και σήμερα, βασίζεται στην εντύπωση που δημιουργείται στον παρατηρητή που βρίσκεται πάνω στη γη, ότι τα ουράνια σώματα κινούνται πάνω στον ουράνιο θόλο ο οποίος έχει τη μορφή μιας σφαίρας (ή ενός ημισφαιρίου). Έτσι αναδύεται η ανάγκη δημιουργίας γεωμετρίας πάνω στη σφαίρα. Η ιδέα της ουράνιας σφαίρας υπήρχε πολύ πριν την ιδέα για τη σφαιρικότητα της γης. Την εποχή του Ομήρου ($8^{ος}$ αιώνας π.Χ.) που πίστευαν ότι η γη είναι επίπεδη, ήταν διαδεδομένη η ιδέα για την ουράνια σφαίρα.

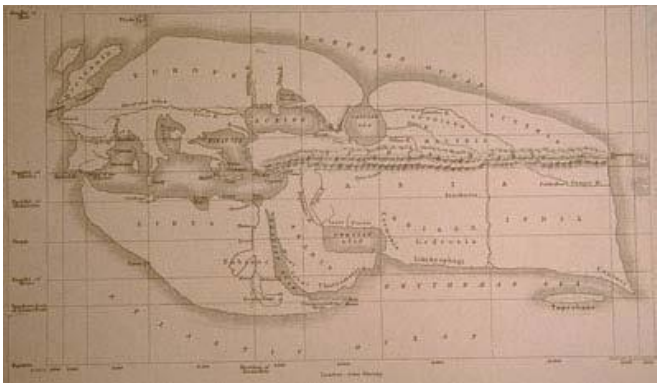


Η συνειδητοποίηση ότι η γη είναι σφαιρική, έδωσε επίσης ώθηση στην περαιτέρω μελέτη της γεωμετρίας πάνω στη σφαίρα σε συνδυασμό με την ανάπτυξη της χαρτογραφίας και της γεωδεσίας. Υπάρχουν αναφορές για τη σφαιρικότητα της γης ήδη από την αρχαία ελληνική γραμματεία. Ο Πυθαγόρας υπέθεσε ότι εφόσον άλλα ουράνια σώματα, όπως ο ήλιος και η σελήνη, είναι σφαιρικά, θα έπρεπε και η γη να είναι σφαιρική. Ο Αριστοτέλης παρατήρησε ότι η σκιά της γης πάνω στη σελήνη κατά την έκλειψη είναι κυκλική, άρα θα όφειλε η γη να είναι σφαιρική.



Η γεωδεσία κατάγεται από την αρχαία Αίγυπτο, όπου οι πλημμύρες του Νείλου επέβαλαν την ανάγκη προσδιορισμού γεωδετικών σημείων για να διασφαλίζονται τα όρια των κτημάτων. Οι αρχαίοι Έλληνες έκαναν χρήση της γεωδεσίας για τον προσδιορισμό σημαντικών σημείων για τη δημιουργία ιερών, βωμών και ναών. Χαρακτηριστικός είναι ο "ομφαλός της Γης" που βρίσκεται στο Αρχαιολογικό Μουσείο Δελφών που φέρει το αρχαιότερο ανάγλυφο γεωδαιτικό δίκτυο.

Ιδρυτής και πατέρας, όμως, της γεωδεσίας θεωρείται ο Ερατοσθένης, ο οποίος τον τρίτο αιώνα π.Χ. θεωρώντας δεδομένο ότι η γη είναι σφαιρική, μέτρησε με μία ευφυή μέθοδο την περιφέρειά της. Στον χάρτη του Ερατοσθένη που περιλαμβάνεται στο έργο του "Γεωγραφικά" υπάρχει ένας κάναβος επτά μεσημβρινών και επτά παραλλήλων, που αποτελεί την πρώτη απόπειρα δημιουργίας ενός συστήματος αναφοράς (συντεταγμένων).

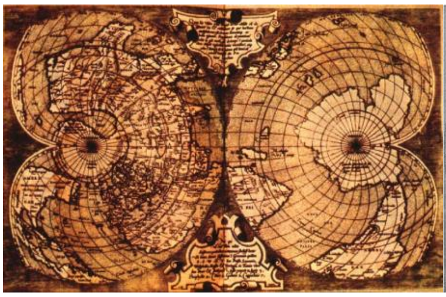
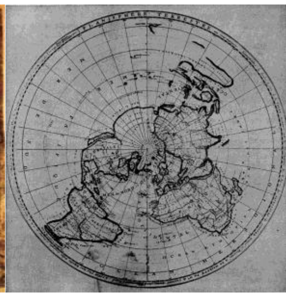
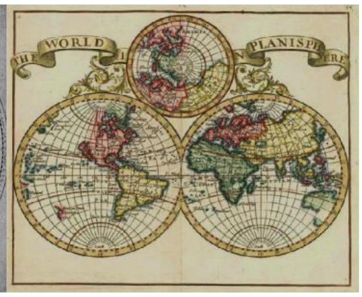


Σημαντική συνεισφορά στην αστρονομία και στη χαρτογραφία αποτελεί η εργασία του Πτολεμαίου. Στο έργο του "Μαθηματική Σύνταξις" ή "Μεγίστη" περιγράφει ένα γεωκεντρικό σύστημα θεωρώντας τη γη σφαιρική, προτείνοντας ένα μοντέλο ομόκεντρων σφαιρών για το σύμπαν, όπου ο ήλιος, η σελήνη και οι πλανήτες κινούνται στις δικές τους σφαίρες και όλοι οι υπόλοιποι απλανείς αστέρες σε μία εξωτερική σφαίρα. Στον χάρτη του φαίνεται ήδη η προσπάθεια αποτύπωσης της σφαιρικότητας της γης.

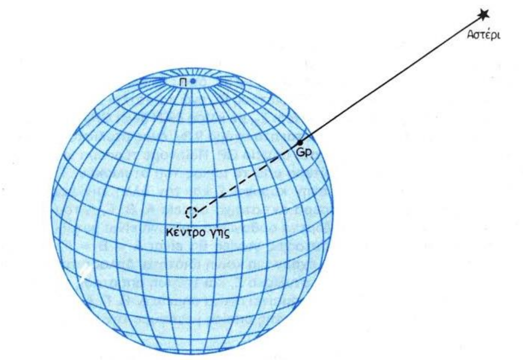
Μία από τις σημαντικές συνεισφορές του ελληνικού πολιτισμού στην ανάπτυξη της χαρτογραφίας θεωρείται ότι ήταν η μαθηματική οργάνωση της γήινης σφαιρικής επιφάνειας.

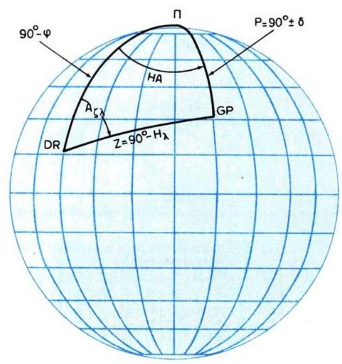
Με δεδομένη τη γνώση της σφαιρικότητας της γης, οι ανάγκες για μακρινά ταξίδια, ιδιαίτερα στη θάλασσα κατά την εποχή των μεγάλων γεωγραφικών ανακαλύψεων, τον 15ο αιώνα, συνέβαλλαν στην ανάπτυξη της χαρτογραφίας και συνεπώς στην ανάγκη περαιτέρω ανάπτυξης και μελέτης της γεωμετρίας της σφαίρας. Αυτή η τάση αποτυπώνεται με όλο και μεγαλύτερη σαφήνεια και ακρίβεια στους χάρτες από αυτή την εποχή και μετά.



Για τις ανάγκες της ωκεανοπλοΐας χρησιμοποιείται η σφαιρική γεωμετρία συνδυαστικά με εφαρμογές της χαρτογραφίας και της αστρονομίας. Ένα παράδειγμα της ευρείας χρήσης της αποτελεί ο προσδιορισμός του τριγώνου θέσεως με τη βοήθεια της γεωγραφικής θέσης (γήινης προβολής) ουράνιου σώματος.





Τις αρχές της σφαιρικής γεωμετρίας χρησιμοποιεί και η αεροπλοΐα. Αν ένα αεροπλάνο ξεκινήσει ατπό το Λονδίνο για τη Νέα Υόρκη, η οποία βρίσκεται νοτιοδυτικά του Λονδίνου, το αεροπλάνο δεν θα ταξιδέψει νοτιοδυτικά, όπως θα ήταν εκ πρώτης όψεως αναμενόμενο. Θα ταξιδέψει πρώτα βορειοδυτικά και στη συνέχει νοτιοδυτικά προκειμένου να ακολουθήσει το τόξο ενός μέγιστου κύκλου, που είναι η συντομότερη διαδρομή πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας.

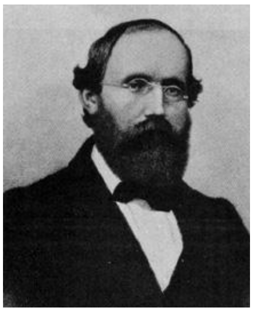
Ανάδυση των γεωμετριών που διαφοροποιήθηκαν από την Ευκλείδεια

Όμως, παρά τη μεγάλη διάδοση και τις σημαντικές πρακτικές εφαρμογές της γεωμετρίας στην επιφάνεια της σφαίρας, εξακολουθεί να μην είναι επιτακτική η ανάγκη θεώρησης μιας αμιγώς σφαιρικής γεωμετρίας με τα δικά της αξιώματα και τους δικούς της κανόνες, μιας και η αντίληψη για τη φύση και τη δομή του χώρου δεν χρειάζεται να αλλάξει, στο βαθμό που μέσα σε έναν ευκλείδειο χώρο τριών διαστάσεων είναι δυνατόν να μελετήσουμε τη συμπεριφορά μιας σφαιρικής γεωμετρίας δύο διαστάσεων. Για αυτό και η δημιουργία μιας μη ευκλείδειας σφαιρικής γεωμετρίας άργησε αρκετά.

Η εμφάνιση των μη ευκλείδειων γεωμετριών δεν υποκινήθηκε από πρακτικές ανάγκες αλλά από την εσωτερική εξέλιξη της επιστήμης. Μετά από πολύχρονη προσπάθεια από πολλούς μαθηματικούς να αποδείξουν το $5^{ο}$ αξίωμα της ευκλείδειας γεωμετρίας ο Ρώσος μαθηματικός Nikolai Lobachevsky και ο Ούγγρος μαθηματικός János Bolyai οδηγήθηκαν στις αρχές του $19^{ου}$ αιώνα, στη διατύπωση μη ευκλείδειων γεωμετριών, στις οποίες δεν ισχύει το $5^{ο}$ αξίωμα της ευκλείδειας γεωμετρίας. Η υπερβολική γεωμετρία που διατύπωσαν, υλοποιείται πάνω σε μία υπερβολική επιφάνεια όπου από ένα σημείο εκτός ευθείας διέρχονται άπειρες παράλληλες στην ευθεία. Λίγο αργότερα, στα μέσα του $19^{ου}$ αιώνα, ο Γερμανός μαθηματικός Bernhard Riemann μετά από προτροπή του δασκάλου του Carl Friedrich Gauss, παρουσίασε μία εργασία στο πανεπιστήμιο Göttingen πάνω στα θεμέλια της γεωμετρίας. Η γεωμετρία του Riemann είναι μη ευκλείδεια ελλειπτική γεωμετρία που υλοποιείται σε μία ελλειπτική επιφάνεια όπου από ένα σημείο εκτός ευθείας δεν διέρχεται καμία παράλληλη στην ευθεία. Η σφαιρική γεωμετρία αποτελεί ειδική περίπτωση της ελλειπτικής γεωμετρίας.

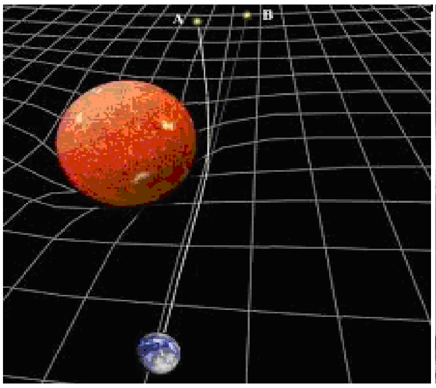

Nikolai Lobachevsky

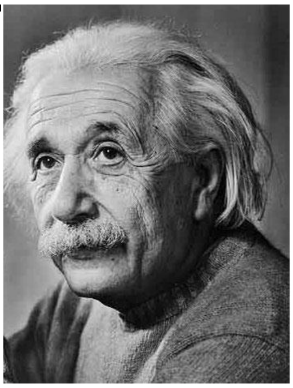

János Bolyai


Bernhard Riemann


Carl Friedrich Gauss

Αρκετά χρόνια αργότερα, στις αρχές του 20ου αιώνα, ο Albert Einstein στηρίχθηκε στην ελλειπτική Γεωμετρία για να διατυπώσει τη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας. Στη θεωρία της σχετικότητας, η ύλη καθορίζει πως θα καμπυλωθεί ο χωροχρόνος, και η καμπύλωση του χωροχρόνου καθορίζει πως θα κινηθούν τα σώματα. Κατανοούμε τις καμπυλωμένες επιφάνειες, όπως την επιφάνεια μιας σφαίρας. Εδώ οι επιφάνειες είναι δισδιάστατες και η καμπυλότητα συμβαίνει κατά την τρίτη διάσταση. Έτσι εμείς που έχουμε την τρισδιάστατη εποπτεία, μπορούμε να τις αντιληφθούμε με τις αισθήσεις μας. Στην πραγματικότητα, όμως, των τεσσάρων διαστάσεων, ο τρισδιάστατος χώρος καμπυλώνεται κατά τη διάσταση του χρόνου και αυτή την καμπύλωση δεν είναι δυνατόν πια να αντιληφθούμε με τις αισθήσεις μας. Εδώ είναι αναγκαία μία σφαιρική-ελλειπτική, μη ευκλείδεια γεωμετρία για να περιγράψει και να εξηγήσει τα φαινόμενα σε έναν καμπυλωμένο χωροχρόνο τεσσάρων διαστάσεων.





Φαίνεται, λοιπόν, να καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι οι μαθηματικές αλήθειες δεν είναι οριστικές, είναι διαψεύσιμες και δυναμικές και εξελίσσονται καθώς αναπτύσσεται η επιστήμη. Από πού, όμως, μπορούμε να αντλούμε τη βεβαιότητα για την εγκυρότητα μιας μαθηματικής πρότασης ή μιας θεωρίας γενικότερα; Ο Γάλλος μαθηματικός Henri Poincaré, στο έργο του "Επιστήμη και υπόθεση" του 1902, μας διαβεβαιώνει ότι δεν έχουμε ανάγκη αυτή τη βεβαιότητα. Το ερώτημα αν μια γεωμετρία είναι αληθής, δεν έχει νόημα. Μία γεωμετρία δεν μπορεί να είναι περισσότερο αληθής από μία άλλη. Μπορεί μόνον να είναι περισσότερο βολική.