

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ  
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2004  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ  
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

**ΘΕΜΑ 1ο**

- A. Αν  $\alpha + \beta i$ ,  $\gamma + \delta i$  είναι μιγαδικοί αριθμοί, όπου  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$  και  $\gamma + \delta i \neq 0$ , να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2} i$$

*Μονάδες 9*

- B. Στον παρακάτω πίνακα, κάθε μιγαδικός αριθμός της **Στήλης I** είναι ίσος με ένα μόνο αριθμό της **Στήλης II** (δύο αριθμοί στη **Στήλη II** περισσεύουν).

Στήλη I	Στήλη II
A. $i^1$	1. $-i$
B. $i^2$	2. $+1$
Γ. $i^3$	3. $i$
Δ. $i^4$	4. $-1$
	5. $0$
	6. $4$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης I** του παραπάνω πίνακα και ακριβώς δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης II**, ώστε να δημιουργείται η σωστή αντιστοιχία.

*Μονάδες 4*

Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις **Γ**, **Δ**, **Ε** και **ΣΤ**, να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.

**Γ.** Έστω δύο συναρτήσεις  $f, g$  ορισμένες σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν οι  $f, g$  είναι συνεχείς στο  $\Delta$  και  $f'(x) = g'(x)$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε υπάρχει σταθερά  $c$  τέτοια, ώστε για κάθε  $x \in \Delta$  να ισχύει:  $f(x) = g(x) + c$ .

**Μονάδες 3**

**Δ.** Μία συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  με  $x_1 < x_2$  ισχύει:  $f(x_1) < f(x_2)$ .

**Μονάδες 3**

**Ε.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}$ . Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και ισχύει  $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ .

**Μονάδες 3**

**ΣΤ.** Ο συντελεστής διεύθυνσης,  $\lambda$ , της εφαπτομένης στο σημείο  $A(x_0, f(x_0))$ , της γραφικής παράστασης  $C_f$  μιας συνάρτησης  $f$ , παραγωγίσιμης στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της είναι  $\lambda = f'(x_0)$ .

**Μονάδες 3**

### ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση,  $f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 3, & x < 1 \\ 6x + k, & x \geq 1 \end{cases}$ , όπου  $k \in \mathbb{R}$ .

**α.** Να βρείτε την τιμή του  $k$ , ώστε η  $f$  να είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ .

**Μονάδες 10**

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(-1, f(-1))$ .

**Μονάδες 8**

γ. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό  $\mu$ , ώστε να ισχύει:

$$\mu \cdot f'(-5) + f'(5) + 34 = 0.$$

**Μονάδες 7**

### ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6ax + \beta$ , όπου  $x \in \mathbb{R}$  και  $a, \beta$  πραγματικοί αριθμοί. Η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο  $x_0 = -2$  και είναι  $f(-2) = 98$ .

α. Να αποδείξετε ότι  $a = -6$  και  $\beta = 54$ .

**Μονάδες 6**

β. Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία.

**Μονάδες 9**

γ. Να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 4**

δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα  $(-1, 2)$ .

**Μονάδες 6**

### ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z = x + yi$ , όπου  $x, y$  πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους υπάρχει  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε να ισχύει:

$$\left( \frac{z + \bar{z}}{2} \right)^2 + \left( \frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^2 i = \alpha + (1 - \alpha)i.$$

Να αποδείξετε ότι:

α. αν  $\text{Im}(z) = 0$ , τότε  $\alpha = 1$ .

**Μονάδες 5**

β. αν  $\alpha = 0$ , τότε  $z^2 + 1 = 0$ .

**Μονάδες 5**

γ. για τον πραγματικό αριθμό  $\alpha$  ισχύει:  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

**Μονάδες 7**

δ. οι εικόνες  $M$  των μιγαδικών αυτών αριθμών  $z$  στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

**Μονάδες 8**

### **ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.  
Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.  
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**