ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

1)Ασκήσεις στις ταυτότητες:

 $\left(α\pm β\right)^{2}=α^{2}\pm 2αβ+β^{2}$

 $\left(α+β+γ\right)^{2}=α^{2}+β^{2}+γ^{2}+2αβ+2αγ+2βγ$

 Αποδείξτε τις παρακάτω ταυτότητες:

 α) (x+y)2 + (x – y)2 – 2(x-y)(x+y) = 4y2

 b) (x+y+z)2 + (x – y)2 +(y – z)2 +(z – x)2 = 3(x2 + y2 + z2)

 c) (χ –α)2 – (χ – β)2 – (α – β)(α+ β – 3χ) = χ(α – β)

 d) (4α2 + 9β4)2 – ( 4α2 – 9β4)2 + 5(12αβ2 - 5) +29 – 12αβ2 = (12αβ2 + 2)2

 e) (α + β + γ)2 - (α - β - γ)2 + (α + β - γ)2 - (α - β + γ)2 = 8αβ

 f) (4χ + 3ψ +5ω)2 – (2χ – ψ + 3ω)2 – ( χ + 3ψ – 2ω)2 = 11χ2 – ψ2 + 12ω2 +22χψ +48ψω +32χω

2) Ασκήσεις στην ταυτότητα

(Α + Β) (Α – Β) = Α2 – Β2

καθώς και στις προηγούμενες ταυτότητες

 Αποδείξτε τις ισότητες

 α) (χ – 2)(χ + 2)(χ2 + 4) = χ4 -16 β) (αβ – 1)(αβ + 1)(α2β2 +1) = α4β4 – 1

 γ) (2α – 1)(2α + 1)(4α2 + 1)(16α4 + 1)(256α8 + 1) = 2562α16 – 1

 δ) (5χ + 4ψ)2 – (4χ + 5ψ)2 = 9(χ –ψ)(χ + ψ)

 ε) (χ + 3)2 + (χ - 3)2 – 2(χ + 2) (χ – 2) = 26

3) Ασκήσεις στη ταυτότητα

 (α + β)3 = α3 +3α2β + 3αβ2 + β3 (α - β)3 = α3 -3α2β + 3αβ2 - β3

 Αποδείξτε τις ισότητες

 α) (χ + ψ)3 + (χ – ψ)3 + 3 ( χ + ψ)(χ – ψ)2 + 3( χ + ψ)2(χ – ψ) = 8χ3

 β) 2(2χ – 2)3 – (χ – 4) (4χ + 2)2 = 108χ

 γ) ( α3 + 1)2 – (α2 +1)3 + 3α2(α + 1)2 = 8α3

4) Ασκήσεις με ρίζες.

 α) $Υπολογίστε την παρασταση \left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}- \sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{3}+1\right)^{2}+\left(\sqrt{3}-2\right)^{2}$

 β)$ Υπολογίστε την παρασταση$ $(\sqrt{χ}^{}-\sqrt{ψ}^{})(\sqrt{χ}^{}+\sqrt{ψ}^{})$ χ, ψ θετικοί αριθμοί

 γ) Έστω το πολυώνυμο Ρ(χ) = χ2 + 2χ + 4. Αποδείξτε ότι α) Ρ(- 4) = 12 β) Ρ($\sqrt{3}-1)=6$

 δ) Αν α=$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ και β = $\sqrt{3}-2$ υπολογίστε τη παράσταση

 α(α - 2$\sqrt{2})+β^{2}+\left(β-α\right)(β+α)$

5) Ταυτότητες υπό συνθήκη

 α) Αν για τους αριθμούς α,β,γ,δ ισχύει ότι αδ=βγ αποδείξτε ότι (α2 + β2)(γ2 + δ2) = (αγ + βδ)2

β) Αν ισχύει χ – ψ =α και χψ = β αποδείξτε ότι χ3 – ψ3 = α3 + 3αβ

γ)Αν χ + ψ + ω = 0 να αποδείξετε ότι χ2 + ψ2 + ω2 = 2 (ω2 – χψ)

δ) Αν ισχύει α + β = 1 αποδείξτε την ισότητα α3(β+1) – β3(α+1) = α – β .

6) Οι ιδιότητες { α2 = 0 → α = 0 } και { α2 + β2 = 0 → α = β = 0 }

 α) Αν ισχύει χ2 – 6χ +9 =0 βρείτε τον αριθμό χ

 β) Αν ισχύει 4ψ2 – 4ψ +1 =0 βρείτε τον αριθμό ψ

 γ) Αν ισχύει χ2 + ψ2 + 2χ + 1 = 0 βρείτε τους αριθμούς χ , ψ

 δ) Αν ισχύει (χ + α)2 + (ψ + β)2 = 4(αχ + βψ) αποδείξτε ότι χ = α και ψ = β

 ε) Αν ισχύει χ2 + ψ2 + ψ2 + ω2 – 2χψ – 2ψω =0 αποδείξτε ότι χ= ψ= ω

 στ)Αν ισχύει α2 + γ2 =2( αβ + βδ + γδ – β2 – δ2) αποδείξτε ότι α = β = γ = δ.

7) Αν οι α, β , γ είναι οι $α=1-\sqrt{2} , β=1+\sqrt{2} , γ= \sqrt{6}$ αποδείξτε ότι $ α^{2}+β^{2}=γ^{2}$

8) Αν οι α, β είναι οι $α= 1-\frac{\sqrt{2}}{2} , β= 1+\frac{\sqrt{2}}{2} τότε αποδείξτε ότι 6αβ= α^{2}+β^{2}$

9) Αν $Α=\left(χ+1\right)^{2} Β=\left(χ-1\right)^{2} και Γ=Α+Β να αποδειχθεί ότι Α-Β+Γ=\left(χ+3\right)^{2}$

10) $Αν α=χ+ψ και β=χψ αποδείξτε ότι α^{3}-3αβ=χ^{3}+ψ^{3}$

11) $Αν χ+\frac{1}{χ}=7 αποδείξτε ότι α) χ^{2}+\frac{1}{χ^{2}}=47 β) χ^{3}+\frac{1}{χ^{3}}=322$

12) $Αν χ+\frac{1}{χ}=6 αποδείξτε ότι α) χ^{2}+\frac{1}{χ^{2}}=34 β) χ^{3}+\frac{1}{χ^{3}}=198$

13) $Αν χ-\frac{1}{χ}=2 αποδείξτε ότι α) χ^{2}+\frac{1}{χ^{2}}=6 β) χ^{3}-\frac{1}{χ^{3}}=14$

14) $Αν χ-\frac{1}{χ}=6 αποδείξτε ότι α) χ^{2}+\frac{1}{χ^{2}}=38 β) χ^{3}-\frac{1}{χ^{3}}=234 $

15) $Αν ισχυει \frac{α}{2}=\frac{β}{\sqrt{2}}=λ αποδείξτε ότι \frac{\left(α+β\right)^{2}+\left(α-β\right)^{2}}{\left(α+β\right)\left(α-β\right)}=6 .$

16) $Αν ισχύει \left(α+β\right)^{2}-\left(α-β\right)^{2}=4 αποδείξτε ότι αβ=1 .$

17) α) Υπολογίστε τις παραστάσεις:

$$α= \left(2χ+1\right)^{2}-3χ^{2} και β=\left(χ-3\right)\left(χ-2\right)+3χ$$

 β) Αποδείξτε ότι για όλες τι τιμές της μεταβλητής $χ$ θα ισχύει

$$α+β\geq 6$$

18) Δίνονται οι αριθμοί: $α=\sqrt{ν+1}-\sqrt{ν} και β=\sqrt{ν+1}+\sqrt{ν} όπου ν φυσικός αριθμός.$

α) Αποδείξτε ότι οι $α,β$ είναι αντίστροφοι μεταξύ τους. β) Αποδείξτε ότι $α^{2}+β^{2}\geq 2$