ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 1ου ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία

Β. i. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$

ii. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x-1}{f(x)}=0$ [γιατί $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$ ή $-\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^+}(2x-1)=-1$]

iii. $\lim\limits[f(x)-2x]=-1$

iv. Έστω $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}\Leftrightarrow f(x)=xg(x)$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=2$ (από i) τότε:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}xg(x)=+\infty$$

Γ. i. Θεωρία

ii. Θεωρία

iii. Η συνάρτηση $g(x)=\sqrt{t^2-1}$ είναι συνεχής στο $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ και $-2\in(-\infty,-1]$. Άρα, η συνάρτηση

$$h(x)=\int_{-2}^{x}\sqrt{t^2-1}dt$$

είναι παραγώγιμη στο $(-\infty,-1]$. Επίσης η συνάρτηση $\varphi(x)=x+3$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.Επομένως, η

$$f(x)=\int_{-2}^{x+3}\sqrt{t^2-1}dt=h(\varphi(x))$$

είναι παραγωγίσιμη για

$$x\in\mathbb{R} \text{ και } \varphi(x)\in(-\infty,-1]$$

άρα $\qquad x+3\leqslant-1\Leftrightarrow x\leqslant-4$.

Έτσι, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Delta=(-\infty,-4]$.

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Έστω $z=\alpha+\beta i$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Τότε $\overline{z}=\alpha-\beta i$. Επομένως:

$\overline{z}=z\Leftrightarrow\alpha-\beta i=\alpha+\beta i\Leftrightarrow 2\beta i=0\Leftrightarrow\beta=0\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$.

Β. α. i. Αφού $z+\dfrac{1}{z}=f(\alpha)$ είναι $z+\dfrac{1}{z}\in\mathbb{R}$ οπότε $z+\dfrac{1}{z}=\overline{\left(z+\dfrac{1}{z}\right)}\Leftrightarrow$

$z+\dfrac{1}{z}=\overline{z}+\dfrac{1}{\overline{z}}\Leftrightarrow z^2\overline{z}+\overline{z}-z\overline{z}^2-z=0\Leftrightarrow(z\overline{z}-1)(z-\overline{z})=0$

$\Leftrightarrow z\overline{z}=1$ ή $z=\overline{z}$

$\Leftrightarrow |z|^2=1$ ή $z\in\mathbb{R}$

Αφού όμως $\mathrm{Im}(z)\neq0$ η περίπτωση $z\in\mathbb{R}$ απορρίπτεται. Άρα $|z|^2=1\Leftrightarrow|z|=1$ που αποδεικνύει ότι η εικόνα του z ανήκει στο μοναδιαίο κύκλο.

ii. $f^2(\alpha)-2=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2=z^2+2z\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-2=z^2+\frac{1}{z^2}=f^2(\beta)$

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f^2(x)$, η οποία είναι προφανώς παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $g'(x)=2f(x)f'(x)$. Από το θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, έχουμε ότι: υπάρχει $\xi\in(\alpha, \beta)$ ώστε

$$g'(\xi)=\frac{g(\beta)-g(\alpha)}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow 2f(\xi)f'(\xi)=\frac{f^2(\beta)-f^2(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

$$\Leftrightarrow 2(\beta-\alpha)f(\xi)f'(\xi)=-2 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)f(\xi)f'(\xi)=1.$$

ΘΕΜΑ 3ο

i. Αφού η f έχει σύνολο τιμών $[\alpha, \beta]$, παρουσιάζει ελάχιστη τιμή α, δηλ. υπάρχει $x_1\in\mathbb{R}$ ώστε $f(x_1)=\alpha$ (1) και μέγιστη τιμή β, δηλ. υπάρχει $x_2\in\mathbb{R}$ ώστε $f(x_2)=\beta$ (2). Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, από το θεώρημα Fermat έχουμε $f'(x_1)=0$ και $f'(x_2)=0$. Προφανώς $x_1\neq x_2$.

ii. Έστω π.χ. $x_1<x_2$. Η f' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με $f'(x_1)=f'(x_2)=0$. Από το θεώρημα Rolle, υπάρχει $x_3\in(x_1, x_2)$ ώστε $f''(x_3)=0$.

iii. Η συνάρτηση $g(x)=f(x)+f'(x)f''(x)$ είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ με $g(x_1)=f(x_1)+f'(x_1)f''(x_1)=\alpha<0$ και $g(x_2)=f(x_2)+f'(x_2)f''(x_2)=\beta>0$. Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi\in(x_1, x_2)$ με $g(\xi)=0$. Το ξ είναι ρίζα της δοσμένης εξίσωσης.

iv. Η συνάρτηση $h(x)=f'(x)e^{f(x)}$ είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με $h'(x)=f''(x)e^{f(x)}+f'(x)[e^{f(x)}]'=e^{f(x)}[f''(x)+(f'(x))^2]$
Επίσης $h(x_1)=f'(x_1)e^{f(x_1)}=0$ και $h(x_2)=f'(x_2)e^{f(x_2)}=0$. Από το θεώρημα Rolle, υπάρχει $\xi\in(x_1, x_2)$ ώστε $h'(\xi)=0 \Leftrightarrow f''(\xi)+(f'(\xi))^2=0$.

ΘΕΜΑ 4ο

i. Θέτω $\frac{t}{x}=u \Leftrightarrow t=xu$ άρα $dt=xdu$. Για $t=x$ είναι $u=1$ και για $t=x^2$ είναι $u=x$.

Έτσι, $f(x)=\frac{1}{2}+\int_1^x \frac{1}{x}[1-f(u)]^2xdu=\frac{1}{2}+\int_1^x [1-f(u)]^2du$

Επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο Δ με

$$f'(x)=\left(\frac{1}{2}+\int_1^x [1-f(u)]^2du\right)'=[1-f(x)]^2>0 \qquad (1)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Η g είναι προφανώς παραγωγίσιμη με

$$g'(x)=\left(\frac{1}{f(x)-1}+x\right)'=\frac{-f'(x)}{[f(x)-1]^2}+1=-1+1=0.$$

Άρα η g είναι σταθερή στο Δ.

iii. Για $x=1$ είναι $f(1)=\frac{1}{2}+\int_1^1[1-f(u)]^2du=\frac{1}{2}$ οπότε $g(1)=\frac{1}{f(1)-1}+1=$

$\frac{1}{\frac{1}{2}-1}+1=-2+1=-1$ και αφού η g είναι σταθερή, έχουμε

$$g(x)=-1 \text{ για κάθε } x>0.$$

$$g(x)=-1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)-1}+x=-1 \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)-1}=-x-1 \Leftrightarrow f(x)=\frac{x}{x+1}$$

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x}{x+1}=0$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x}{x+1}=1$

Οπότε $f(\Delta)=(\lim\limits_{x\to 0^+}f(x),\ \lim\limits_{x\to 0}f(x))=(0,1)$

iv. $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{\ln(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)}{(\ln(x+1))'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x+1}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=1.$$

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 2ου ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. i. Θεωρία

ii. α) $\int xg''(x)dx=\int x[g'(x)]'dx=xg'(x)-\int g'(x)dx=xg'(x)-g(x)+c$

β) Με την αντικατάσταση $u=\alpha-x$ είναι: $dx=-du$ και

$$\int_0^\alpha g(\alpha-x)dx=-\int_\alpha^0 g(u)du=\int_0^\alpha g(u)du=\int_0^\alpha g(x)dx.$$

Β. Θεωρία

ΘΕΜΑ 2ο

i. Προφανώς, ισχύει το θεώρημα του Rolle για την f στο [1, 2], οπότε υπάρχει $\xi\in(1,2)$ με $f'(\xi)=0$. Το ξ είναι μοναδικό γιατί η f' είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Για $x<\xi$ είναι $f'(x)<f'(\xi)\Leftrightarrow f'(x)<0$ και για $x>\xi$ είναι $f'(x)>f'(\xi)\Leftrightarrow f'(x)>0$, οπότε η f έχει ελάχιστο στο $x_0=\xi$, γιατί είναι συνεχής σ' αυτό και εκατέρωθέν του αλλάζει πρόσημο.

iii. Από το (ii) ερώτημα προκύπτει ο επόμενος πίνακας με τη μονοτονία της f, από την οποία φαίνεται ότι $f(x)<0$ στο (1, 2).

x	1		ξ		2
f′		−	0	+	
f	0	↘	f(ξ)	↗	0

ΘΕΜΑ 3ο

α. $f(2) = \dfrac{2+i\overline{z}}{1-\overline{z}} = \dfrac{2+2i}{-1} = -2-2i$

οπότε $|f(2)| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$

β. Είναι $[f(2)]^2 = (-2-2i)^2 = 4 + 8i - 4 = 8i$

$[f(2)]^4 = (8i)^2 = 64i^2 = -64$ και

$[f(2)]^{2004} = \{[f(2)]^4\}^{501} = -64^{501}$

Άρα, ο f(2) είναι πραγματικός αριθμός

γ. Με την αντικατάσταση του f(z) στο 1ο μέλος, μετά τις πράξεις προκύπτει το 2ο μέλος.

$$\left|\frac{f(z)-2}{f(z)+i}\right| = \left|\frac{\dfrac{2+i\overline{z}}{1-\overline{z}} - 2}{\dfrac{2+i\overline{z}}{1-\overline{z}} + i}\right| = \left|\frac{\dfrac{2+i\overline{z}-2+2i\overline{z}}{1-\overline{z}}}{\dfrac{2+i\overline{z}+i-i\overline{z}}{1-\overline{z}}}\right| = \left|\frac{\overline{z}(2+i)}{2+i}\right| = |\overline{z}| = |z|.$$

δ. Αν θέσουμε M(x, y), τότε f(z) = x+ iy, οπότε με |z| = 1 από το (γ) ερώτημα είναι διαδοχικά:

$$\left|\frac{f(z)-2}{f(z)+i}\right| = 1$$

ή $|f(z)-2| = |f(z)+i|$

ή $|x + iy-2| = |x + iy+i|$

ή $|(x-2) + iy| = |x + i(y+1)|$

ή $\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$

ή $-4x-2y + 3 = 0$, που απαντάει στο ερώτημα

ΘΕΜΑ 4ο

α. **i.** Για x=0 έχουμε:

$$\int_0^{f(0)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt = 0$$

Επειδή $\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} > 0$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$, θα είναι f(0) = 0. Πράγματι

* αν είναι f(0) > 0, τότε, $\displaystyle\int_0^{f(0)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt > 0$, άτοπο.

* αν πάλι f(0) < 0, τότε, $\displaystyle\int_0^{f(0)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\, dt < 0$, άτοπο.

ii. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Αν ήταν $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ τότε:

$$\int_{f(x_1)}^{f(x_2)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt \geqslant 0 \Leftrightarrow \int_{f(x_2)}^{0} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt + \int_{0}^{f(x_1)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \int_{0}^{f(x_1)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt \geqslant -\int_{f(x_2)}^{0} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$$

$$\Leftrightarrow \int_{0}^{f(x_1)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt \geqslant \int_{0}^{f(x_2)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt \Leftrightarrow x_1 \geqslant x_2 \text{ άτοπο.}$$

Άρα, $f(x_1) < f(x_2)$, που σημαίνει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Η ανίσωση γράφεται $\displaystyle\int_{0}^{f(f(\kappa^2+2))} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt > \int_{0}^{f(f(3\kappa))} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$ *(1)*

Από την υπόθεση η (1) είναι ισοδύναμη με την $f(\kappa^2+2) > f(3\kappa)$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, με την

$\kappa^2 + 2 > 3\kappa \quad \Leftrightarrow \quad \kappa^2 - 3\kappa + 2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \kappa < 1$ ή $\kappa > 2$.

γ. Είναι $$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\displaystyle\int_{0}^{f(x)} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt}$$

Με την αντικατάσταση $f(x) = u$, είναι

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$$

δηλαδή $u \to 0$ και το τελευταίο όριο γίνεται:

$$\lim_{u\to 0} \frac{u}{\displaystyle\int_{0}^{u} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt} \qquad (2)$$

Η $g(u) = \displaystyle\int_{0}^{u} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$, $u \in \mathbb{R}$, είναι συνεχής, ως παραγωγίσιμη, άρα

$$\lim_{u\to 0} g(u) = g(0) \Leftrightarrow \lim_{u\to 0} \int_{0}^{u} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = \int_{0}^{0} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt = 0.$$

Έτσι, το όριο (2) είναι της μορφής $\dfrac{0}{0}$ και από τον κανόνα De L' Hospital προκύπτει

$$\lim_{u\to 0} \frac{u}{\displaystyle\int_{0}^{u} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt} = \lim_{u\to 0} \frac{(u)'}{\left(\displaystyle\int_{0}^{u} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt\right)'} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}} = 1$$

οπότε $f'(0) = 1$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ 3ου ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. i. Θεωρία

ii. Λ – Λ – Σ

Β. i. Θεωρία

ii. Λ – Λ

ΘΕΜΑ 2ο

α) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα του Rolle για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, οπότε υπάρχουν ξ_1, ξ_2 με $\xi_1 \in (x_1, x_2)$, $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ ώστε $\mathbf{f'(\xi_1)=0}$ και $\mathbf{f'(\xi_2)=0}$. Είναι φανερό ότι $\xi_1 < \xi_2$.
Επειδή $\mathbf{f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + \beta}$ η f' ως δευτέρου βαθμού έχει το πολύ δύο ρίζες, τα είναι $\xi_1 < \xi_2$ είναι μοναδικά και εκατέρωθεν τους η f' αλλάζει πρόσημο, άρα, η f παρουσιάζει ακρότατα σ' αυτά.

β) Από το (α) ερώτημα η $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + \beta$ έχει δύο ρίζες άνισες, τις $\xi_1 < \xi_2$. Έτσι η διακρίνουσά της είναι θετική:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 4\alpha^2 - 12\beta > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 > 3\beta$$

γ) Είναι $f''(x) = 6x + 2\alpha$, οπότε

$$\begin{aligned} f''(\xi_1) + f''(\xi_2) &= 6\xi_1 + 2\alpha + 6\xi_2 + 2\alpha \\ &= 6(\xi_1 + \xi_2) + 4\alpha \qquad \text{Vieta}: \xi_1 + \xi_2 = -\frac{2\alpha}{3} \\ &= 6\left(-\frac{2\alpha}{3}\right) + 4\alpha = 0 \end{aligned}$$

δ) Επειδή $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$, από το θεώρημα του Rolle για την f' στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$, υπάρχει $x_0 \in (\xi_1, \xi_2)$ με $f''(x_0) = 0$. Επειδή η $f''(x) = 6x + 2\alpha$ είναι πρώτου βαθμού, εκατέρωθεν του x_0 αλλάζει πρόσημο, άρα για $x = x_0$ η f έχει σημείο καμπής το $(x_0, f(x_0))$.

ΘΕΜΑ 3ο

Πρώτα βρίσκουμε τον τύπο της f(x). Είναι:

$$f(x) = \frac{|x-z|^2 - |x+\bar{z}|^2}{} = \frac{|x-\alpha-i\beta|^2 - |x+\alpha-i\beta|^2}{}$$

$$= \frac{(x-\alpha)^2+\beta^2-[(x+\alpha)^2+\beta^2]}{x^2+\alpha^2+\beta^2} = \frac{-4\alpha x}{x^2+\alpha^2+\beta^2}$$

α) $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{4\alpha x}{x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{4\alpha}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{4\alpha x}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{4\alpha}{x}\right) = 0$$

β) Η υπόθεση $|z+1| > |z-1|$ δίνει $|\alpha + i\beta + 1| > |\alpha + i\beta - 1|$ ή

$$\sqrt{(\alpha+1)^2+\beta^2} > \sqrt{(\alpha-1)^2+\beta^2} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 0$$

Η f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x) = -4\alpha\frac{(x)'(x^2+\alpha^2+\beta^2) - x(x^2+\alpha^2+\beta^2)'}{(x^2+\alpha^2+\beta^2)^2} = -4\alpha\frac{-x^2+\alpha^2+\beta^2}{(x^2+\alpha^2+\beta^2)^2}$$

ή $$f'(x) = 4\alpha\frac{x^2-(\alpha^2+\beta^2)}{(x^2+\alpha^2+\beta^2)^2}\ ,\ \alpha>0$$

Το πρόσημο της f' με τη μονοτονία και τα ακρότατα της f, φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

x	$-\infty$		$-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$		$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
f(x)	0	↗	$\boxed{M}$	↘	$\boxed{-M}$	↗	0

όπου, $$M = f(-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}) = \frac{2\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha^2+\beta^2}, \qquad \text{με } M>0$$

Το σύνολο τιμών της f είναι η επόμενη ένωση διαστημάτων

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), f(-\sqrt{\alpha^2+\beta^2})\right] \cup \left[f(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}), f(-\sqrt{\alpha^2+\beta^2})\right] \cup \left[f(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)$$

$$= (0, M] \cup [-M, M] \cup [-M, 0) = [-M, M]$$

Άρα η f έχει ολικό μέγιστο τον αριθμό M και ολικό ελάχιστο τον $-M$.

γ) Για $\alpha>0$ στο προηγούμενο ερώτημα βρήκαμε $f(\mathbb{R}) = [-M, M]$

ή $$f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{2\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha^2+\beta^2}, \frac{2\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha^2+\beta^2}\right]$$

Όμοια για $\alpha<0$ προκύπτει $f(\mathbb{R}) = \left[\frac{2\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha^2+\beta^2}, -\frac{2\alpha\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha^2+\beta^2}\right]$.

Τέλος, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-4\alpha x}{x^2+\alpha^2+\beta^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, δηλαδή η f έχει μοναδική ρίζα $x=0$

ΘΕΜΑ 4ο

Α. i) Επειδή $f'(x) = \frac{1}{3f^2(x)+1}$ είναι $3f'(x)f^2(x) + f'(x) = 1$ ή

$[f^3(x) + f(x)]' = (x)' \Leftrightarrow f^3(x) + f(x) = x + c$

Η τελευταία ισότητα για $x=0$ δίνει $c=2$ οπότε $f^3(x) + f(x) = x + 2$

ii) Η εξίσωση $y = f(x)$ δίνει:

$$y^3 + y = x + 2 \Leftrightarrow x = y^3 + y - 2, \quad y\in\mathbb{R}$$

οπότε, από την μοναδικότητα της λύσης x, προκύπτει ότι η f είναι "1−1" και άρα, έχει αντίστροφη την:

$$f^{-1}(x) = x^3 + x - 2,\ x\in\mathbb{R}.$$

iii) Επειδή $f^{-1}(0) = -2$ είναι ισοδύναμα: $f(-2) = 0$.

Β. Η $f'(x) = \frac{1}{3f^2(x)+1}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως λόγος παραγωγίσιμων συναρτήσεων με : $$f''(x) = \frac{-6f'(x)\cdot f(x)}{[3f^2(x)+1]^2}$$

Επειδή $f'(x)>0$ το πρόσημο της f'' εξαρτάται μόνο από την $f(x)$. Η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και από το **Α.iii)** έχει ρίζα το -2. Έτσι:

με $x<-2$ είναι $f(x)<f(-2) \Leftrightarrow f(x)<0 \Leftrightarrow f''(x)>0$

με $x>-2$ είναι $f(x)>f(-2) \Leftrightarrow f(x)>0 \Leftrightarrow f''(x)<0$

Το πρόσημο της f'' με την κυρτότητα της f φαίνονται στον επόμενο πίνακα.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	−	
f(x)		∪	$\boxed{0}$	∩	

Η f έχει σημείο καμπής το $(-2, 0)$

Γ. Το ζητούμενο εμβαδόν Ε ισούται με το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$E=\int_{-2}^{0}|f(x)|dx=\int_{-2}^{0}f(x)dx \qquad [x\geqslant -2 \Leftrightarrow f(x)\geqslant 0]$$

Θέτουμε $f(x)=u \Leftrightarrow x=f^{-1}(u)$ τότε

$dx=[f^{-1}(u)]'du=(u^3+u-2)'du=(3u^2+1)du$

Τα νέα άκρα ολοκλήρωσης είναι τα $f(0)=1$, $f(-2)=0$.

Τότε

$$E=\int_{0}^{1}u(3u^2+1)du=\int_{0}^{1}(3u^3+u)du=\left[\frac{3u^4}{4}+\frac{u^2}{2}\right]_0^1=\frac{5}{4} \text{ τ.μ.}$$