ΕΛΕΥΘΕΡΟΤΥΠΙΑ

26/01/2004

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ -ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Επιμέλεια: ΑΝΔΡΙΟΠΟΥΛΟΣ ΘΕΟΔΩΡΟΣ

Αν $z\in C$ και ισχύει $(z+i)^{17}+(2i)^{11}(\overline{z}-i)^6=0$, με $z\neq -i$, να αποδείξετε ότι:

α. $|z+i|=2$

β. $w=\dfrac{(z+i)^2+4}{z+i}\in R$

γ. $u=(z+i)^{23}\in I$

Λύση:

Είναι:

$$(z+i)^{17}+(2i)^{11}(\overline{z}-i)^6=0\Leftrightarrow (z+i)^{17}+2^{11}\cdot i^{11}(\overline{z}-i)^6=0\Leftrightarrow$$
$$(z+i)^{17}+2^{11}\cdot(-i)(\overline{z}-i)^6=0\Leftrightarrow (z+i)^{17}=2^{11}i(\overline{z}-i)^6 \quad (1)$$

α. Έχουμε

$$(z+i)^{17}=2^{11}\cdot i(\overline{z}-i)^6\Rightarrow |z+i|^{17}=\left|2^{11}\right|\cdot|i|\cdot|\overline{z}-i|^6$$

Όμως

$|\overline{z}-i|=\left|\left(\overline{\overline{z}-i}\right)\right|=|z+i|$ οπότε $|z+i|^{17}=2^{11}|z+i|^6$ και αφού $|z+i|\neq 0$ άρα

$\dfrac{|z+i|^{17}}{|z+i|^6}=2^{11}\Leftrightarrow |z+i|^{11}=2^{11}\Leftrightarrow |z+i|=2$.

β. Είναι:

$$|z+i|^2=(z+i)\overline{(z+i)}=2^2\Leftrightarrow 2^2=(z+i)(\overline{z}-i)\Leftrightarrow \overline{z}-i=\frac{4}{z+i} \quad (2)$$

Έχουμε :

$$w=\frac{(z+i)^2+4}{z+i}=\frac{(z+i)^2}{z+i}+\frac{4}{z+i}\overset{(2)}{=}z+i+\overline{z}-i=z+\overline{z}=2\operatorname{Re}(z)$$

Άρα $w\in R$.

γ. Είναι $u=(z+i)^{23}=(z+i)^{17}(z+i)^6\overset{(1)}{=}2^{11}i(\overline{z}-i)^6(z+i)^6=$

$$=2^{11}i\left|(z+i)^6\right|^2=2^{11}i|z+i|^{12}=2^{11}i2^{12}$$

Έτσι $u = 2^{23} i$, άρα $u \in I$.