ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ (22-6-2000)
ΑΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο:

Α.1. Να γράψετε τον τύπο που δίνει το νιοστό όρο α_ν μιας αριθμητικής προόδου (α_ν), που έχει πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω.

Μονάδες 3

Α.2. Να γράψετε τη σχέση μεταξύ των πραγματικών αριθμών α, β, γ έτσι, ώστε οι αριθμοί αυτοί, με τη σειρά που σας δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Μονάδες 3

Α.3. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα S_ν των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν), που έχει πρώτο όρο α_1 και λόγο $\lambda \neq 1$, είναι: $S_\nu = \alpha_1 \cdot \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$

Μονάδες 6,5

Β.1. Στη **Στήλη Α** δίνεται ο πρώτος όρος α_1 και η διαφορά ω τριών αριθμητικών προόδων και στη **Στήλη Β** ο νιοστός όρος α_ν τεσσάρων αριθμητικών προόδων. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β** που αντιστοιχεί στο σωστό νιοστό όρο.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. $\alpha_1 = 1,\ \omega = -2$	**1.** $\alpha_\nu = -\nu$
β. $\alpha_1 = 0,\ \omega = 3$	**2.** $\alpha_\nu = 4\nu - 3$
γ. $\alpha_1 = -1,\ \omega = -1$	**3.** $\alpha_\nu = 3 - 2\nu$
	5. $\alpha_\nu = 3\nu - 3$

Μονάδες 6

Β.2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστο** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Οι αριθμοί $-5,\ 5,\ 15$, με τη σειρά που σας δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

β. Ο εικοστός όρος της αριθμητικής προόδου $10,\ 7,\ 4,\ \ldots$ είναι ίσος με 20.

γ. Σε κάθε αριθμητική πρόοδο (α_ν) για τους όρους της $\alpha_2,\ \alpha_4,\ \alpha_6$ ισχύει η σχέση $2\alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_6$

Μονάδες 4,5

Β.3. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*
Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι ίσος με 1 και ο λόγος ίσος με 2, τότε το άθροισμα των πρώτων ν όρων της είναι ίσο με:

Α. $\dfrac{2^\nu - 1}{2}$ **Β.** $2^\nu - 1$ **Γ.** $2^{\nu-1}$ **Δ.** $1 - 2^\nu$ **Ε.** κανένα από τα προηγούμενα

Μονάδες 2

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Α.1. Είναι: $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\cdot\omega$

Α.2. Είναι: $2\beta = \alpha + \gamma$

Α.3. Θεωρία

Β.1. $\alpha \longrightarrow 3$ $\beta \longrightarrow 4$ $\gamma \longrightarrow 1$

Β.2. **α.** Σωστό
β. Λάθος
γ. Σωστό

Β.3. Σωστό το Β.

ΘΕΜΑ 2ο:

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + (\beta - 1)x^3 - 3x - 2\beta + 6$ όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+1$ είναι ίσο με 2, τότε να δείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 4$.

Μονάδες 15

β) Για τις τιμές των α και β του ερωτήματος α), να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

$P(x) = \alpha x^3 + (\beta - 1)x^2 - 3x - 2\beta + 6$

α) Είναι: $P(1) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta - 1 - 3 - 2\beta + 6 = 0 \Leftrightarrow \alpha - \beta = -2$

$P(-1) = 2 \Leftrightarrow -\alpha + \beta - 1 + 3 - 2\beta + 6 = 2 \Leftrightarrow -\alpha - \beta = -6 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 6$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = -2 \\ \alpha + \beta = 6 \end{cases} \Leftrightarrow 2\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2, \quad \beta = 4$$

β) $P(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + (4-1)x^2 - 3x - 2 \cdot 4 + 6 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$

πιθανές ακέραιες ρίζες: ± 1, ± 2

	2	3	-3	-2	1
		2	5	2	
	2	5	2	0	

$$(x-1)(2x^2 + 5x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ \text{ή} \\ 2x^2 + 5x + 2 = 0 \qquad \Delta = 9 \qquad x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm 3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 3ο:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x-2\eta\mu^2 x-4\sigma\upsilon\nu^2 x$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Να μετατρέψετε τη συνάρτηση f στη μορφή $f(x)=\rho\,\eta\mu(2x+\phi)k$, όπου ρ, φ, k πραγματικοί αριθμοί και $\rho>0$.

Μονάδες 9

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η συνάρτηση f παίρνει τη μέγιστη τιμή και ποια είναι αυτή.

Μονάδες 6

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ στο διάστημα $[0,\,\pi]$.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

α) $f(x)=2\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu x-2\eta\mu^2 x-4\sigma\upsilon\nu^2 x=\eta\mu 2x-2\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{2}-4\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{2}=$

$=\eta\mu 2x-1+\sigma\upsilon\nu 2x-2-2\sigma\upsilon\nu 2x=\eta\mu 2x-\sigma\upsilon\nu 2x-3$

Είναι: $\alpha=1,\ \beta=-1$

$\rho=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\sigma\upsilon\nu\phi=\frac{\alpha}{\rho}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \eta\mu\phi=\frac{\beta}{\rho}=\frac{-1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\phi=-\frac{\pi}{4}$$

Οπότε: $f(x)=\sqrt{2}\,\eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-3$

β) Η $f(x)$ παίρνει τη μέγιστη τιμή όταν:

$\eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow\eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 2x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=2\kappa\pi+\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{3\pi}{8},\quad\kappa\in Z$

Η μέγιστη τιμή της $f(x)$ είναι η $\sqrt{2}-3$

γ) $f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2}\,\eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-3-\sqrt{2}\,\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+3=\sqrt{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sqrt{2}\,\eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}\,\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\Leftrightarrow\eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\eta\mu 2x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}-\sigma\upsilon\nu 2x\cdot\eta\mu\frac{\pi}{4}-\eta\mu 2x\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}-\sigma\upsilon\nu 2x\cdot\eta\mu\frac{\pi}{4}=1\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -2\,\text{συν}2x\cdot\eta\mu\frac{\pi}{4}=1\Leftrightarrow -2\cdot\text{συν}2x\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1\Leftrightarrow \text{συν}\,2x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow \text{συν}\,2x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{συν}\,2x=-\text{συν}\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow \text{συν}\,2x=\text{συν}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow \text{συν}\,2x=\text{συν}\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow 2\,x=2\,\kappa\pi\pm\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\kappa\pi\pm\frac{3\pi}{8},\quad \kappa\in Z$$

Για $\kappa=0$, $x=\frac{3\pi}{8}$

Για $\kappa=1$, $x=\pi+\frac{3\pi}{8}=\frac{11\pi}{8}$, $x=\pi-\frac{3\pi}{8}=\frac{5\pi}{8}$

ΘΕΜΑ 4ο:

Ένας πληθυσμός βακτηριδίων τριπλασιάζεται σε αριθμό κάθε μια ώρα.

Α. Αν αρχικά υπάρχουν 10 βακτηρίδια, να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων ύστερα από 6 ώρες.

Μονάδες 9

Β. Στο τέλος της έκτης ώρας ο πληθυσμός των βακτηριδίων ψεκάζεται με μια ουσία, η οποία σταματά τον πολλαπλασιασμό τους και συγχρόνως προκαλεί την καταστροφή $3^3\cdot 10$ βακτηριδίων κάθε ώρα.

Β.1. Να βρείτε το πλήθος των βακτηριδίων που απομένουν 20 ώρες μετά τον ψεκασμό.

Μονάδες 8

Β.2. Μετά από πόσες ώρες από τη στιγμή του ψεκασμού θα καταστραφούν όλα τα βακτηρίδια

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Α. Αρχικά υπάρχουν 10 βακτηρίδια. Ύστερα από μια ώρα τα βακτηρίδια είναι: $3\cdot 10=30$.
Ο αριθμός των βακτηριδίων είναι γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1=30$ και $\lambda=3$.

Τα βακτηρίδια ύστερα από 6 ώρες είναι: $\alpha_6=\alpha_1\cdot\lambda^5=30\cdot 3^5=30\cdot 243=7.290$

Β. Μια ώρα μετά τον ψεκασμό τα βακτηρίδια $7.290-270=7.020$.
Ο αριθμός των βακτηριδίων είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1=7.020$ και $\omega=-3^3\cdot 10=-270$.

Β.1. Ο αριθμός των βακτηριδίων μετά από 20 ώρες είναι:
$\alpha_{20}=\alpha_1+19\cdot\omega\Leftrightarrow\alpha_{20}=7.020+19(-270)=7.020-5.130=1.890$

Β.2. Ο αριθμός των βακτηριδίων μετά από ν ώρες είναι:
$\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\cdot\omega=7.020+(\nu-1)\cdot(-270)=7.020-270\cdot\nu+270=7.290-270\cdot\nu$

Είναι: $\alpha_\nu=0\Leftrightarrow 7.290-270\cdot\nu=0\Leftrightarrow\nu=\frac{7.290}{270}\Leftrightarrow\nu=27$

Σε 27 ώρες από τη στιγμή του ψεκασμού, θα καταστραφούν όλα τα βακτηρίδια.