ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ (10-6-2000)
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1^{ο}:

Α1. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΜ να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών του ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς, δηλαδή:

$$AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + \frac{B\Gamma^2}{2}$$

Μονάδες 10

Α2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ να συμπληρώσετε τη σχέση $A\Gamma^2 - AB^2 = ...$ ώστε να εκφράζει το δεύτερο θεώρημα των διαμέσων.

Μονάδες 2,5

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση για καθένα από τα ερωτήματα **Β1** και **Β2**.

Β1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται: $\beta = 8$, $\gamma = 6$ και $\mu_\alpha = 5$. Η πλευρά α είναι ίση με:

Α. 7 **Β.** 4 **Γ.** 10 **Δ.** 9 **Ε.** 11

Μονάδες 6,5

Β2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται $\alpha = 4$, $\beta = 7$, $\gamma = 5$, ΑΔ το ύψος και ΑΜ η διάμεσος. Η προβολή ΔΜ της διαμέσου ΑΜ πάνω στην πλευρά α είναι ίση με:

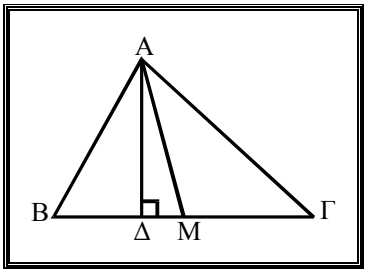
Α. 4 **Β.** 8 **Γ.** $8/3$ **Δ.** 5 **Ε.** 3

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Α1. Θεωρία

Α2. $A\Gamma^2 - AB^2 = 2B\Gamma \cdot \Delta M$ όπου ΔΜ η προβολή της διαμέσου ΑΜ πάνω στη ΒΓ

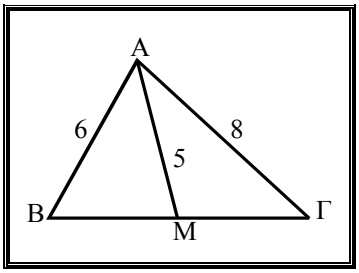


Β1. Από το 1^{ο} θεώρημα διαμέσων, στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

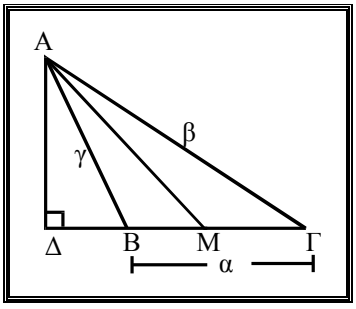
$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha{}^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow 8^2 + 6^2 = 2 \cdot 5^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100 = 50 + \frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow 50 = \frac{\alpha^2}{2} \Rightarrow \alpha^2 = 100 \Rightarrow \alpha = 10$$

Δηλαδή σωστή απάντηση είναι το Γ.



B2. Είναι: $\left.\begin{array}{r}\beta^2=49\\ \alpha^2+\gamma^2=16+25=41\end{array}\right\}$ άρα:



$\beta^2>\alpha^2+\gamma^2\Rightarrow \hat{B}>90^o$

Από το 2^o θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$\beta^2-\gamma^2=2\alpha\cdot\Delta M\Rightarrow 7^2-5^2=2\cdot4\cdot\Delta M\Rightarrow 24=8\cdot\Delta M\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta M=3$

Άρα σωστή απάντηση το Ε.

ΘΕΜΑ 2ο:

Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB//\Gamma\Delta$, $AB<\Gamma\Delta$, $\hat{A}=\hat{\Delta}=90^o$, $AB=4$, $A\Delta=3$, $B\Gamma=5$. Να υπολογίσετε:

α) την προβολή της ΒΓ πάνω στην ΔΓ

Μονάδες 9

β) το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ

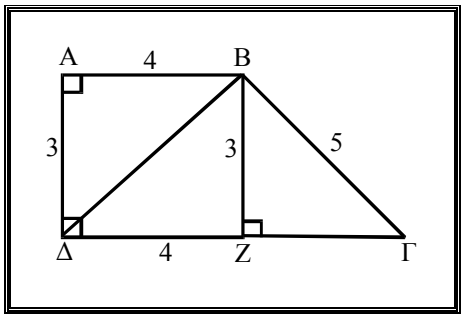
Μονάδες 9

γ) το εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΓ

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

α) Έστω ΖΓ η προβολή της ΒΓ πάνω στη ΔΓ.
Το τετράπλευρο ΑΒΖΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο άρα: $Z\Delta=AB=4$ και $BZ=A\Delta=3$.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΖΓ από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $Z\Gamma^2=B\Gamma^2-BZ^2=5^2-3^2=16$.
Άρα $Z\Gamma=4$.



β) Είναι $\Delta\Gamma=\Delta Z+Z\Gamma=4+4=8$.
Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ είναι:
$E_{AB\Gamma\Delta}=\dfrac{(\Delta\Gamma+AB)BZ}{2}=\dfrac{(8+4)\cdot3}{2}=18$.

γ) Το εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΓ είναι: $E_{\Delta B\Gamma}=\dfrac{1}{2}\Delta\Gamma\cdot BZ=\dfrac{1}{2}8\cdot3=12$

ΘΕΜΑ 3ο:

Σε κύκλο (O,R) είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά $AB=15$.
Να υπολογίσετε:

α) την ακτίνα R του κύκλου

Μονάδες 6

β) το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (O,R)

Μονάδες 6

γ) το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ

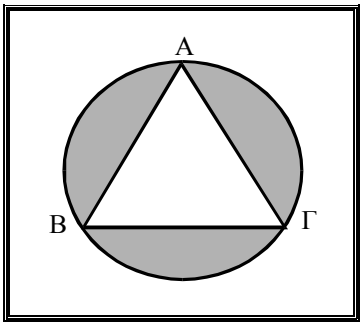
Μονάδες 6

δ) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και το ισόπλευρο τρίγωνο

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

α) Το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρά $\lambda_3 = 15$.



Είναι: $\lambda_3 = R\sqrt{3} \Rightarrow 15 = R\sqrt{3} \Rightarrow R = \frac{15}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow R = \frac{15\sqrt{3}}{3} \Rightarrow R = 5\sqrt{3}$

β) Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (O, R) είναι:

$E = \pi R^2 = 3{,}14\left(5\sqrt{3}\right)^2 = 3{,}14 \cdot 75 = 235{,}5$

γ) Το εμβαδόν του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ είναι: $E_{ΑΒΓ} = \frac{\lambda_3{}^2\sqrt{3}}{4} = \frac{15^2\sqrt{3}}{4} = \frac{225\sqrt{3}}{4}$

δ) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και το ισόπλευρο τρίγωνο, θα βρεθεί αν από το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου αφαιρέσουμε το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου. Δηλαδή:

$E_{χωρίου} = 235{,}5 - \frac{225\sqrt{3}}{4} = \frac{942 - 225\sqrt{3}}{4} = \frac{3\left(314 - 75\sqrt{3}\right)}{4}$

ΘΕΜΑ 4ο:

Δίνεται ο κύκλος (O, R) και μια διάμετρός του ΑΒ. Από ένα σημείο Μ του κύκλου, διαφορετικό των Α και Β, φέρουμε κάθετη στη διάμετρο ΑΒ, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ζ και τη διάμετρο στο σημείο Δ. Επί της ΑΒ θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα $ΟΓ = ΟΔ$ και φέρουμε τη ΜΓ, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) $MΔ^2 = AΔ \cdot ΔB$

Μονάδες 6

β) $MΓ \cdot ΓE = MΔ \cdot ΔZ = R^2 - OΔ^2$

Μονάδες 6

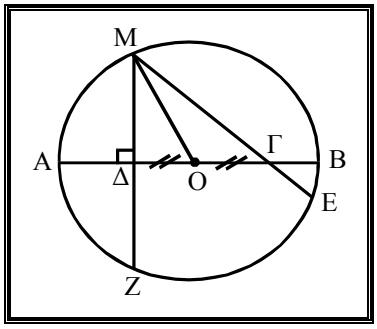
γ) $MΓ^2 + MΔ^2 = 2\left(R^2 + OΔ^2\right)$

Μονάδες 5

δ) $\frac{MΓ}{ΓE} + \frac{MΔ}{ΔZ} = 2\frac{R^2 + OΔ^2}{R^2 - OΔ^2}$

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:



α) Το $O\Delta$ είναι το απόστημα της χορδής MZ οπότε:
$M\Delta = \Delta Z \quad (1)$
Από τη δύναμη του σημείου Δ ως προς τον κύκλο (O, R) έχουμε:
$A\Delta \cdot \Delta B = \Delta M \cdot \Delta Z \Rightarrow$
$A\Delta \cdot \Delta B \overset{(1)}{=} \Delta M \cdot \Delta M \Rightarrow$
$A\Delta \cdot \Delta B = M\Delta^2$

β) Από τη δύναμη του σημείου Γ ως προς τον κύκλο (O, R) έχουμε:
$M\Gamma \cdot \Gamma E = R^2 - \Gamma O^2$
$= R^2 - O\Delta^2 \quad$ (αφού $O\Gamma = O\Delta$)
Από τη δύναμη του σημείου Δ ως προς τον κύκλο (O, R) έχουμε: $\Delta M \cdot \Delta Z = R^2 - O\Delta^2$
Άρα $M\Gamma \cdot \Gamma E = M\Delta \cdot \Delta Z = R^2 - O\Delta^2$

γ) Στο τρίγωνο $M\Delta\Gamma$ η MO είναι διάμεσος, άρα:

$$M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 2MO^2 + \frac{\Delta\Gamma^2}{2}$$
$$= 2R^2 + \frac{(2O\Delta)^2}{2}$$
$$= 2R^2 + 2O\Delta^2$$
$$= 2\left(R^2 + O\Delta^2\right)$$

δ) Από το β) ερώτημα έχουμε:

$$M\Gamma \cdot \Gamma E = R^2 - O\Delta^2 \Rightarrow \Gamma E = \frac{R^2 - O\Delta^2}{M\Gamma}$$
$$M\Delta \cdot \Delta Z = R^2 - O\Delta^2 \Rightarrow \Delta Z = \frac{R^2 - O\Delta^2}{M\Delta}$$

Οπότε έχουμε:

$$\frac{M\Gamma}{\Gamma E} + \frac{M\Delta}{\Delta Z} = \frac{M\Gamma}{\frac{R^2 - O\Delta^2}{M\Gamma}} + \frac{M\Delta}{\frac{R^2 - O\Delta^2}{M\Delta}}$$

$$= \frac{M\Gamma^2}{R^2 - O\Delta^2} + \frac{M\Delta^2}{R^2 - O\Delta^2}$$

$$= \frac{M\Gamma^2 + M\Delta^2}{R^2 - O\Delta^2}$$

$$\overset{(\gamma)}{=} \frac{2\left(R^2 + O\Delta^2\right)}{R^2 - O\Delta^2}$$