ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ (12-6-2000)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ - Γ΄ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^{o}:

Α1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ΄ ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A\left(x_0, f(x_0)\right)$.

Μονάδες 4

Α2. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ΄ ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 8,5

Β1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0.
β) Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.
γ) Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0, τότε η f' είναι συνεχής στο x_0.

Μονάδες 4,5

Β2. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα τον αριθμό της στήλης Β που αντιστοιχεί στην εφαπτομένη της κάθε συνάρτησης στο σημείο x_0.*

Στήλη Α συναρτήσεις	**Στήλη Β εφαπτόμενες**
α. $f(x)=3x^3,\ x_0=1$	**1.** $y=-2x+\pi$
β. $f(x)=\eta\mu\, 2x,\ x_0=\frac{\pi}{2}$	**2.** $y=\frac{1}{4}x+1$
γ. $f(x)=3\lvert x\rvert,\ x_0=0$	**3.** $y=9x-6$
δ. $f(x)=\sqrt{x},\ x_0=4$	**4.** $y=-9x+5$
	5. δεν υπάρχει

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Α1. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ είναι:
$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

Α2. Θεωρία

Β1. $\alpha \longrightarrow \Lambda$ $\quad\beta \longrightarrow \Lambda$ $\quad\gamma \longrightarrow \Sigma$

Β2. $\alpha \longrightarrow 3$ $\quad\beta \longrightarrow 1$ $\quad\gamma \longrightarrow 5$ $\quad\delta \longrightarrow 2$

$\boxed{\textbf{ΘΕΜΑ } 2^o\textbf{:}}$

Δίνεται η συνάρτηση $f(z)=\dfrac{2z+i}{\bar{z}-2i}$, $z\in C$ με $z\neq -2i$, όπου $\bar{z}$ ο συζυγής του z.

α) Να βρείτε την τριγωνομετρική μορφή των μιγαδικών αριθμών:

$$w_1 = f(9-5i)$$

Μονάδες 6

$$w_2 = \left[\frac{\sqrt{2}}{3} f(9-5i)\right]^{2004}$$

Μονάδες 6

β) Θεωρούμε τον πίνακα $M=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\begin{bmatrix}|w_1| & 0\\ 0 & -|w_1|\end{bmatrix}$ όπου $|w_1|$ το μέτρο του μιγαδικού αριθμού w_1 του ερωτήματος **α**.

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή πρόταση.

Ο γραμμικός μετασχηματισμός T με πίνακα M είναι:

Α. στροφή με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και γωνία $\theta=\dfrac{\pi}{4}$

Β. συμμετρία ως προς τον άξονα $x'x$

Γ. συμμετρία ως προς τον άξονα $y'y$

Δ. συμμετρία ως προς την ευθεία $y=x$

Ε. ομοιοθεσία με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και λόγο $\lambda=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

Μονάδες 5

γ) Αν M ο πίνακας του ερωτήματος **β**, τότε να βρεθεί ο πίνακας X ώστε να ισχύει: $MX=K$, όπου K είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί στο γραμμικό μετασχηματισμό στροφής με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο και γωνία $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

Μονάδες 8

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

α) $w_1=f(9-5i)=\dfrac{2(9-5i)+i}{9+5i-2i}=\dfrac{18-9i}{9+3i}=\dfrac{3(6-3i)}{3(3+i)}=\dfrac{6-3i}{3+i}=\dfrac{(6-3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\dfrac{18-6i-9i+3i^2}{3^2+1}=$

$$=\frac{15-15i}{10}=\frac{15(1-i)}{10}=\frac{3}{2}(1-i)=\frac{3}{2}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\text{συν}\frac{7\pi}{4}+i\,\text{ημ}\frac{7\pi}{4}\right)$$

Αυτή είναι η τριγωνομετρική μορφή του w_1 και είναι: $|w_1|=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ και $\text{Arg}\,w_1=\dfrac{7\pi}{4}$

$$w_2=\left[\frac{\sqrt{2}}{3}f(9-5i)\right]^{2004}=\left[\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\text{συν}\frac{7\pi}{4}+i\,\text{ημ}\frac{7\pi}{4}\right)\right]^{2004}=\left(\text{συν}\frac{7\pi}{4}+i\,\text{ημ}\frac{7\pi}{4}\right)^{2004}=$$

$$=\text{συν}\left(2004\cdot\frac{7\pi}{4}\right)+i\,\text{ημ}\left(2004\cdot\frac{7\pi}{4}\right)=\text{συν}(3507\pi)+i\,\text{ημ}(3507\pi)$$

Αλλά $3507\pi = 1753 \cdot 2\pi + \pi$.

Άρα $\operatorname{Arg} w_2 = \pi$.

Οπότε $w_2 = \sigma\upsilon\nu\, \pi + i\, \eta\mu\, \pi = -1$
Αυτή είναι η τριγωνομετρική μορφή του w_2

β) Είναι $|w_1| = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, οπότε: $M = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\begin{bmatrix} \dfrac{3\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Ο γραμμικός μετασχηματισμός με πίνακα Μ είναι συμμετρία ως προς τον άξονα $x'x$. Σωστό το Β.

γ) Ο πίνακας Κ που αντιστοιχεί στο γραμμικό μετασχηματισμό στροφής με κέντρο την αρχή των αξόνων και γωνία $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ είναι $K = \begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2} & -\eta\mu\dfrac{\pi}{2} \\ \eta\mu\dfrac{\pi}{2} & \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Οπότε η εξίσωση $MX = K$ γράφεται: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (1)

Ο πίνακας $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ έχει ορίζουσα: $|M| = -1 \neq 0$, επομένως είναι αντιστρέψιμος με $M^{-1} = \dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Επομένως η (1) γράφεται: $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

ΘΕΜΑ 3ο:

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$. Αν $f(0) = 2$ και $f(1) = 4$, να δείξετε ότι:

α) η ευθεία $y = 3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ΄ ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$

Μονάδες 7

β) υπάρχει $x_1 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε $f(x_1) = \dfrac{f(1/5) + f(2/5) + f(3/5) + f(4/5)}{4}$

Μονάδες 12

γ) υπάρχει $x_2 \in (0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2\, ,\, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 2000$.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

α) Θεωρώ τη συνάρτηση $\Phi(x) = f(x) - 3,\ \ x \in [0,1]$

- Η $\Phi(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως διαφορά συνεχών.
- $\Phi(0) = f(0) - 3 = 2 - 3 = -1$

  $\Phi(1) = f(1) - 1 = 4 - 1 = 3$

Άρα: $\Phi(0) \cdot \Phi(1) = -3 < 0$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $\Phi(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 3$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0,1)$.

Είναι όμως: $\Phi'(x) = f'(x) - 0 = f'(x) > 0 \quad \forall x \in (0,1)$.

Δηλαδή η $\Phi(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$, οπότε η λύση είναι μοναδική.

Άρα η γραφική παράσταση τη f και η ευθεία $y = 3$ τέμνονται σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

β) Θεωρώ τη συνάρτηση: $g(x) = 4f(x) - f\left(\frac{1}{5}\right) - f\left(\frac{2}{5}\right) - f\left(\frac{3}{5}\right) - f\left(\frac{4}{5}\right),\ \ x \in [0,1]$.

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως διαφορά συνεχών.

- $g(0) = 4f(0) - f\left(\frac{1}{5}\right) - f\left(\frac{2}{5}\right) - f\left(\frac{3}{5}\right) - f\left(\frac{4}{5}\right)$

  $g(1) = 4f(1) - f\left(\frac{1}{5}\right) - f\left(\frac{2}{5}\right) - f\left(\frac{3}{5}\right) - f\left(\frac{4}{5}\right)$

Αλλά $f'(x) > 0\ \ \forall x \in (0,1)$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$.

Έτσι έχουμε:

$$0 < \frac{1}{5} \Rightarrow f(0) < f\left(\frac{1}{5}\right)$$

$$0 < \frac{2}{5} \Rightarrow f(0) < f\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$0 < \frac{3}{5} \Rightarrow f(0) < f\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$0 < \frac{4}{5} \Rightarrow f(0) < f\left(\frac{4}{5}\right)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε: $4f(0) < f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) \Leftrightarrow$

$$4f(0) - f\left(\frac{1}{5}\right) - f\left(\frac{2}{5}\right) - f\left(\frac{3}{5}\right) - f\left(\frac{4}{5}\right) < 0 \Leftrightarrow g(0) < 0.$$

Ομοίως:

$$\frac{1}{5} < 1 \Rightarrow f\left(\frac{1}{5}\right) < f(1)$$

$$\frac{2}{5} < 1 \Rightarrow f\left(\frac{2}{5}\right) < f(1)$$

$$\frac{3}{5} < 1 \Rightarrow f\left(\frac{3}{5}\right) < f(1)$$

$$\frac{4}{5} < 1 \Rightarrow f\left(\frac{4}{5}\right) < f(1)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε: $f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) < 4f(1) \Leftrightarrow$

$$4f(1)-f\left(\frac{1}{5}\right)-f\left(\frac{2}{5}\right)-f\left(\frac{3}{5}\right)-f\left(\frac{4}{5}\right)>0 \Leftrightarrow g(1)>0$$

Άρα $g(0)\cdot g(1)<0$.

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$g(x_1)=0 \Leftrightarrow 4f(x_1)-f\left(\frac{1}{5}\right)-f\left(\frac{2}{5}\right)-f\left(\frac{3}{5}\right)-f\left(\frac{4}{5}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x_1)=\frac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$$

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $x_2 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε: $f'(x_2)=2$.

Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-2x$.

- Η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως διαφορά συνεχών.
- Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $h'(x)=f'(x)-2$
- $\left.\begin{matrix} h(0)=f(0)=2 \\ h(1)=f(1)-2=4-2=2 \end{matrix}\right\}$ Άρα $h(0)=h(1)$

Οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Rolle, υπάρχει $x_2 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$h'(x_2)=0 \Leftrightarrow f'(x_2)-2=0 \Leftrightarrow f'(x_2)=2$.

Δηλαδή υπάρχει $x_2 \in (0,1)$ ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2x+2000$.

ΘΕΜΑ 4^{o}:

Τη χρονική στιγμή $t=0$ χορηγείται σ΄ έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση $f(t)=\dfrac{\alpha t}{1+\left(\dfrac{t}{\beta}\right)^2}$, $t \geq 0$ όπου α και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

α. Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β.

Μονάδες 15

β. Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

α. Είναι: $f(t)=\dfrac{\alpha t}{1+\left(\dfrac{t}{\beta}\right)^2}=\dfrac{\alpha t}{1+\dfrac{t^2}{\beta^2}}=\dfrac{\alpha t}{\dfrac{\beta^2+t^2}{\beta^2}}=\dfrac{\beta^2\alpha t}{\beta^2+t^2}$, $t \geq 0$.

Η $f(t)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με:

$$f'(t)=\frac{\left(\beta^2\alpha t\right)'\left(\beta^2+t^2\right)-\beta^2\alpha t\left(\beta^2+t^2\right)'}{\left(\beta^2+t^2\right)^2}=\frac{\beta^2\alpha\left(\beta^2+t^2\right)-\beta^2\alpha t\cdot 2t}{\left(\beta^2+t^2\right)^2}=\frac{\beta^2\alpha\left(\beta^2+t^2-2t^2\right)}{\left(\beta^2+t^2\right)^2}=$$

$$=\frac{\beta^2\alpha\left(\beta^2-t^2\right)}{\left(\beta^2+t^2\right)^2}$$

Επειδή η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης $f(t)$ είναι 15 μονάδες και επιτυγχάνεται σε $t=6$ ώρες, θα έχουμε: $f'(6)=0$ και $f(6)=15$.

- Είναι $f'(6)=0 \Leftrightarrow \dfrac{\beta^2\alpha\left(\beta^2-36\right)}{\left(\beta^2+36\right)^2}=0 \Leftrightarrow \beta^2\alpha\left(\beta^2-36\right)=0 \Leftrightarrow \beta^2-36=0 \Leftrightarrow \beta^2=36 \Leftrightarrow \beta=6$,

  αφού $\beta>0$

  και $f(6)=15 \Leftrightarrow \dfrac{36\cdot\alpha\cdot 6}{36+36}=15 \Leftrightarrow \dfrac{6\alpha}{2}=15 \Leftrightarrow \alpha=5$.

  Για $\alpha=5$, $\beta=6$ είναι: $f(t)=\dfrac{36\cdot 5\cdot t}{36+t^2}=\dfrac{180\,t}{36+t^2}$ και $f'(t)=\dfrac{180\left(36-t^2\right)}{\left(36+t^2\right)^2}$

  Από τον πίνακα μεταβολών της f έχουμε:

t	0	6	$+\infty$
$f'(t)$	$+$	0	$-$
$f(t)$	↗		↘
		max $f(6)=15$	

Άρα οι ζητούμενες τιμές είναι: $\alpha=5$, $\beta=6$

β. Είναι: $f(t)\geq 12 \Leftrightarrow \dfrac{180\,t}{36+t^2}\geq 12 \Leftrightarrow \dfrac{15\,t}{36+t^2}\geq 1 \Leftrightarrow 15\,t\geq 36+t^2 \Leftrightarrow t^2-15\,t+36\leq 0$.

Το τριώνυμο $t^2-15\,t+36$ έχει ρίζες $t_1=3$ και $t_2=12$

t	0		3		12		$+\infty$
$t^2-15\,t+36$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα: $t\in[3\,,12]$