ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
Β΄ ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ ΠΡΩΤΟ

Α. Να δείξετε ότι, σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy, η εξίσωση του κύκλου C, με κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ, είναι $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=\rho^2$.

(12,5 μονάδες)

Β. Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση για καθένα από τα ερωτήματα Β1 και Β2.

Β1. Το κέντρο Κ και η ακτίνα ρ του κύκλου $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ είναι:

(α) K(2, –1), ρ=4 (β) K(2, –1), ρ=2
(γ) K(–2, 1), ρ=2 (δ) K(–2, 1), ρ=4

(2,5 μονάδες)

Β2. Το κέντρο του κύκλου $(x-1)^2+(y-2)^2=25$ ανήκει στην ευθεία:

(α) $y=x+2$ (β) $y=2x-1$
(γ) $2x+y=5$ (δ) $3x+2y=7$

(4 μονάδες)

Β3. Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $x^2+y^2=49$. Να γράψετε στο τετράδιο σας τα σημεία της στήλης Ι και δίπλα τον αριθμό της στήλης ΙΙ που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Ι	Στήλη ΙΙ
Α(0, 7)	1. εσωτερικό σημείο του κύκλου
Β(3, 4)	2. σημείο του κύκλου C
Γ(7, –2)	3. εξωτερικό σημείο του κύκλου C
Δ(–7, 0)	

(6 μονάδες)

ΛΥΣΗ

Α. Θεωρία σχολικού βιβλίου, σελ. 134.

Β. Β1 $\rightarrow$ β
Β2 $\rightarrow$ δ (επαληθεύοντας το K(1, 2) στην αντίστοιχη ευθεία.
Β3: Α(0, 7) $\rightarrow$2, αφού $(OA)=7=\rho$
Β(3, 4) $\rightarrow$1, αφού $(OB)=5<\rho$
Γ(7, –2) $\rightarrow$3, αφού $(O\Gamma)=\sqrt{53}>\rho$
Δ(–7. 0) $\rightarrow$2, αφού $(O\Delta)=7=\rho$

ΘΕΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟ

Ένας γιατρός παίρνει δύο διαδοχικές μετρήσεις της αρτηριακή πίεσης ενός ασθενούς με διαφορά λίγων λεπτών. Κατά την πρώτη μέτρηση η πίεση του ασθενούς βρέθηκε 15,6 ενώ κατά τη δεύτερη μέτρηση η πίεση βρέθηκε 14,4.

Α. Υποθέτοντας ότι η πραγματική τιμή της πίεσης βρίσκεται μεταξύ των δύο αυτών τιμών, να βρείτε ποια από τις δύο αυτές τιμές είναι προσέγγιση με έλλειψη και ποια προσέγγιση με υπέρβαση.

(5 μονάδες)

Β. Αν θεωρήσουμε ως προσεγγιστική τιμή της πίεσης το μέσο όρο των δύο προηγούμενων τιμών, να βρείτε:

(α) την ακρίβεια της προσέγγισης

(10 μονάδες)

(β) τη σχετική ακρίβεια της προσέγγισης

(10 μονάδες)

ΛΥΣΗ

Α. Ισχύει $14{,}4 \le P \le 15{,}6$.
Επομένως, η τιμή 14,4 είναι προσέγγιση με έλλειψη, ενώ η τιμή 15,6 είναι προσέγγιση με υπέρβαση.

Β. Είναι $\alpha = \dfrac{14{,}4 + 15{,}6}{2} = 15$.
Έχουμε διαδοχικά

$$14{,}4 \le P \le 15{,}6$$
$$14{,}4 - 15 \le P - 15 \le 15{,}6 - 15$$
$$-0{,}6 \le P - 15 \le 0{,}6$$

Άρα είναι $|P - 15| \le 0{,}6$

δηλαδή $P = 15 \pm 0{,}6$

οπότε $\sigma = 0{,}6$

που σημαίνει ότι το α είναι προσεγγιστική τιμή της πίεσης με ακρίβεια 0,6.

(β) Είναι

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{|\alpha|} = \frac{0{,}6}{|15|} = \frac{0{,}6}{15} = 0{,}04 = 4\%$$

ΘΕΜΑ ΤΡΙΤΟ

Ένα προϊόν έχει αρχική τιμή 100000 δρχ.
(α) Ποια είναι η τελική τιμή του προϊόντος, αν στην αρχική τιμή γίνει αύξηση 12% και στη συνέχεια έκπτωση 8%;

(7 μονάδες)

(β) Να αποδείξετε ότι, η τελική τιμή πώλησης του προϊόντος δεν αλλάζει αν στο προϊόν γίνει αρχικά έκπτωση 8% και στη συνέχεια έκπτωση 12% ή αν γίνει αρχικά έκπτωση 12% και στη συνέχεια έκπτωση 8%.

(9 μονάδες)

(γ) Να αποδείξετε ότι η τιμή πώλησης, στην περίπτωση που γίνεται έκπτωση 20% στην αρχική τιμή, είναι μικρότερη από την τιμή πώλησης που προκύπτει από το ερώτημα (β).

(9 μονάδες)

ΛΥΣΗ

(α) Σχηματικά έχουμε:

$$\alpha_0 \xrightarrow{+12\%} \alpha_1 \xrightarrow{-8\%} \alpha_2$$

Είναι $\varepsilon_{01} = 1 + \frac{12}{100} = 1{,}12$

$\varepsilon_{12} = 1 - \frac{8}{100} = 0{,}92$

Άρα $\varepsilon_{02} = \varepsilon_{01} \cdot \varepsilon_{12} = 1{,}12 \cdot 0{,}92 = 1{,}0304$

Όμως $\varepsilon_{02} = \frac{\alpha_2}{\alpha_0} \Leftrightarrow \alpha_2 = \alpha_0 \cdot \varepsilon_{02} = 100000 \cdot 1{,}0304 = 103040$ δρχ.

(β) **1η περίπτωση**

Σχηματικά έχουμε

$$\alpha_0 \xrightarrow{-8\%} \alpha_1 \xrightarrow{-12\%} \alpha_2$$

Είναι $\varepsilon_{02} = \varepsilon_{01} \cdot \varepsilon_{12} = 0{,}92 \cdot 0{,}88 = 0{,}8096$

Άρα $\alpha_2 = \alpha_0 \cdot \varepsilon_{02} = 100000 \cdot 0{,}8096 = 80960$ δρχ.

2η περίπτωση

Σχηματικά έχουμε

$$\alpha_0 \xrightarrow{-12\%} \alpha'_1 \xrightarrow{-8\%} \alpha'_2$$

Είναι $\varepsilon'_{02} = \varepsilon'_{01} \cdot \varepsilon'_{12} = 0{,}88 \cdot 0{,}92 = 0{,}8096$

Άρα $\alpha'_2 = \alpha_0 \cdot \varepsilon'_{02} = 100000 \cdot 0{,}8096 = 80960$ δρχ.

Συνεπώς η τελική τιμή πώλησης του προϊόντος δεν αλλάζει.

(γ) Σχηματικά είναι:

$$\alpha_0 \xrightarrow{-20\%} \alpha_1$$

Είναι $\varepsilon_{01} = 1 - \frac{20}{100} = 0{,}8$

Άρα $\varepsilon_{01} = \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \Leftrightarrow \alpha_1 = \varepsilon_{01} \cdot \alpha_0 = 80000$ δρχ.

Επομένως, η τιμή πώλησης στην περίπτωση αυτή είναι μικρότερη από αυτήν που προκύπτει στο ερώτημα (β).

ΘΕΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟ

Τα σχέδια κατασκευής του υπόγειου σιδηρόδρομου (ΜΕΤΡΟ) μιας πόλης, σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy, περιλαμβάνουν:

Τη γραμμή $Γ_1$ με διανυσματική εξίσωση $ε_1 : \vec{r} = 2\vec{i} + \vec{j} + λ(i + 3\vec{j}),\ λ \in R$ και τη γραμμή $Γ_2$ που διέρχεται από το σταθμό Σ(–3, 2) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u} = (2,-1)$.

(α) Να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής $Γ_1$ στη μορφή Ax+By+Γ=0.

(5 μονάδες)

(β) Να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής $Γ_2$ στην ίδια μορφή με το ερώτημα (α).

(7 μονάδες)

(γ) Στο σημείο Ο(0, 0) πρέπει να κατασκευαστεί ένας νέος σταθμός που θα εξυπηρετεί μια συγκεκριμένη περιοχή. Δεδομένου ότι το κόστος κατασκευής ανά μονάδα μήκους γραμμής είναι το ίδιο για όλες τις περιοχές, με ποια από τις γραμμές $Γ_1$ και $Γ_2$ πρέπει να συνδεθεί ο νέος σταθμός έτσι, ώστε η γραμμή σύνδεσης του να έχει το μικρότερο κόστος;

(13 μονάδες)

ΛΥΣΗ

(α) Είναι $ε_1 : \vec{r} = 2\vec{i} + \vec{j} + λ(\vec{i} + 3\vec{j}),\ λ \in R$.

Οι παραμετρικές εξισώσεις της γραμμης $Γ_1$ είναι:

$$\begin{cases} x = 2 + λ \\ y = 1 + 3λ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = λ \\ \dfrac{y-1}{3} = λ \end{cases} \Leftrightarrow x - 2 = \frac{y-1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x - 6 = y - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x - y - 5 = 0$$

(β) Εϊναι Σ(–3, 2) και $\vec{u}(2,-1)$.

Αντικαθιστώντας στον τύπο $\dfrac{x - x_1}{α} = \dfrac{y - y_1}{β}$ προκύπτει:

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-2}{-1} \Leftrightarrow -x - 3 = 2y - 4 \Leftrightarrow x + 2y - 1 = 0$$

(γ) Το μικρότερο κόστος επιτυγχάνεται όταν η απόσταση του νέου σταθμού στο σημείο Ο από την αντίστοιχη γραμμή είναι η μικρότερη δυνατή.

Εφαρμόζοντας τον τύπο $d(M,ε) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Γ|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ έχουμε:

$$d_1 = d(O,Γ_1) = \frac{|3\cdot 0 - 1\cdot 0 - 5|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

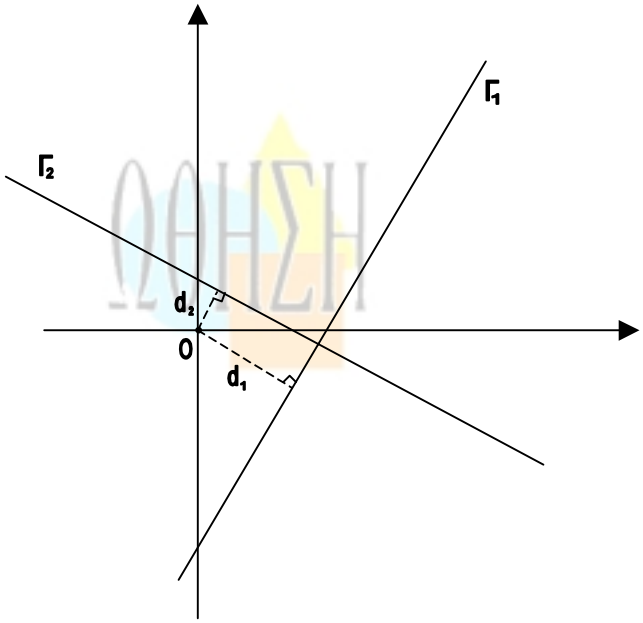
$$d_2 = d(O,Γ_2) = \frac{|3\cdot 0 + 2\cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

Οπότε είναι:

$$d_2 < d_1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}}{5} < \frac{\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{5} < 5\sqrt{10} \Leftrightarrow 4 \cdot 5 < 25 \cdot 10 \Leftrightarrow 20 < 250$$

Επομένως, ο νέος σταθμός πρέπει να συνδεθεί με τη γραμμή $Γ_2$.

Σχηματική παράσταση



$Γ_1$	x	0	2
	y	–5	1

$Γ_2$	x	1	–1
	y	0	1

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ

Τα θέματα καλύπτουν όλο το φάσμα της ύλης και αποτελούν άμεσες εφαρμογές αντιστοίχων τύπων.