ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ (24-6-2000)
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ - Β΄ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1ο:

Α.1. Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ.

Μονάδες 2

Α.2. Πότε η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο; Ποιο είναι το κέντρο του και ποια η ακτίνα του;

Μονάδες 4,5

Α.3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ε του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $x x_1 + y y_1 = \rho^2$

Μονάδες 6

Β.1. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.*

Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 10$ και το σημείο του $M(1,-3)$. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Μ έχει εξίσωση:

Α. $x + 3y = 10$ **Β.** $5x - y = 8$ **Γ.** $x - 3y = 10$

Δ. $3x + 2y = 3$ **Ε.** $\frac{1}{2}x + y = 5$

Μονάδες 4

Β2. *Στη **Στήλη Α** δίνονται οι εξισώσεις που παριστάνουν κύκλους και στη **Στήλη Β** τα κέντρα των κύκλων και οι ακτίνες τους. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β** που αντιστοιχεί στη σωστή εξίσωση του κύκλου.*

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$	**1.** $K(0,-1),\ \rho = 2$
β. $x^2 + (y+1)^2 = 4$	**2.** $K(3,-2),\ \rho = 1$
	5. $K(3,-2),\ \rho = 4$

Μονάδες 4

Β.3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Το σημείο $(1,-1)$ ανήκει στον κύκλο $x^2 + y^2 = 2$

β. Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ και η ευθεία $y = 2x$ εφάπτονται

γ. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda^2 = 0$, όπου λ πραγματικός αριθμός, είναι εξίσωση κύκλου.

Μονάδες 4,5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Α1. Θεωρία

Α2. Θεωρία

Α.3. Θεωρία

Β.1. Σωστό το Γ.

Β.2. $\alpha \longrightarrow 3$ $\beta \longrightarrow 1$

Β.3. $\alpha \longrightarrow$ σωστό $\beta \longrightarrow$ λάθος $\gamma \longrightarrow$ λάθος

ΘΕΜΑ 2ο:

Θεωρούμε τους ακεραίους της μορφής $\alpha = 6k + \upsilon$ με $0 \le \upsilon < 6$ και k ακέραιος.
Να δείξετε ότι:

α) Οι παραπάνω ακέραιοι α που δεν είναι πολλαπλάσια του 2 ή του 3 παίρνουν τη μορφή $\alpha = 6k + 1$ ή τη μορφή $6k + 5$, όπου k ακέραιος.

Μονάδες 10

β) το τετράγωνο κάθε ακεραίου αριθμού της μορφής του ερωτήματος (α) μπορεί να πάρει τη μορφή: $\alpha^2 = 3\mu + 1$, όπου μ ακέραιος.

Μονάδες 10

γ) η διαφορά των τετραγώνων δύο ακεραίων του ερωτήματος (α) είναι πολλαπλάσιο του 3.

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

Είναι $\alpha = 6k + \upsilon$ με $0 \le \upsilon < 6$ οπότε:
$\alpha = 6k$ ή $\alpha = 6k + 1$ ή $\alpha = 6k + 2$ ή $\alpha = 6k + 3$ ή $\alpha = 6k + 4$ ή $\alpha = 6k + 5$

α) Επειδή οι ακέραιοι α δεν είναι πολλαπλάσια του 2 ή του 3, θα είναι:
$\alpha \ne 6k$, $\alpha \ne 6k + 2$, $\alpha \ne 6k + 3$, $\alpha \ne 6k + 4$ οπότε θα είναι:
$\alpha = 6k + 1$ ή $\alpha = 6k + 5$.

β) Αν $\alpha = 6k + 1$ τότε:
$\alpha^2 = (6k + 1)^2 = 36k^2 + 12k + 1 = 3(12k^2 + 4k) + 1 = 3\mu + 1$

Αν $\alpha = 6k + 5$ τότε:
$\alpha^2 = (6k + 5)^2 = 36k^2 + 60k + 25 = 36k^2 + 60k + 24 + 1 = 3(12k^2 + 20k + 8) + 1 = 3\mu + 1$

γ) Είναι: $\alpha^2 - \beta^2 = 3\mu + 1 - (3\lambda + 1) = 3\mu - 3\lambda = 3(\mu - \lambda) = \pi o \lambda 3$

ΘΕΜΑ 3ο:

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = (4, -2)$ και $\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7, 8)$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} = (-1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, -2)$

Μονάδες 7

β) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός k, ώστε τα διανύσματα $k\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

Μονάδες 8

γ) Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\gamma}=(3,-1)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

α) Έχουμε το σύστημα: $\begin{cases} 2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}=(4,-2) & (1) \\ \vec{\alpha}-3\vec{\beta}=(-7,8) & (2) \end{cases}$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2) και έχουμε: $3\vec{\alpha}=(-3,6)\Leftrightarrow \vec{\alpha}=\frac{1}{3}(-3,6)\Leftrightarrow \vec{\alpha}=(-1,2)$

Αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε:

$(-1,2)-3\vec{\beta}=(-7,8)\Leftrightarrow -3\vec{\beta}=(-7,8)-(-1,2)\Leftrightarrow -3\vec{\beta}=(-6,6)\Leftrightarrow \vec{\beta}=-\frac{1}{3}(-6,6)\Leftrightarrow \vec{\beta}=(2,-2)$

β) Είναι: $(k\vec{\alpha}+\vec{\beta})\perp(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})\Leftrightarrow (k\vec{\alpha}+\vec{\beta})(2\vec{\alpha}+3\vec{\beta})=0\Leftrightarrow 2\kappa\vec{\alpha}^2+3\kappa\vec{\alpha}\vec{\beta}+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+3\vec{\beta}^2=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2k|\vec{\alpha}|^2+(3k+2)\vec{\alpha}\vec{\beta}+3|\vec{\beta}|^2=0$ (3)

Αλλά: $|\vec{\alpha}|^2=(-1)^2+2^2=5$

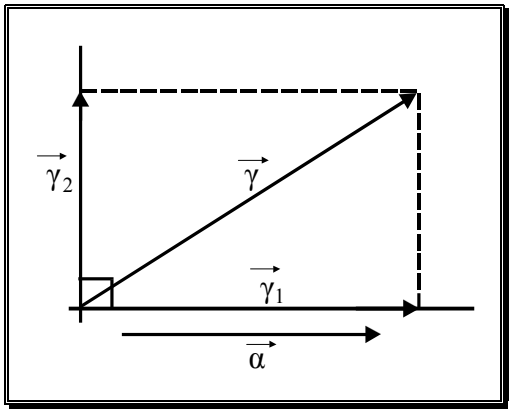
$|\vec{\beta}|^2=2^2+(-2)^2=8$

$\vec{\alpha}\vec{\beta}=(-1)\cdot 2+2\cdot(-2)=-6$

Η (3) λοιπόν γίνεται: $2k\cdot 5+(3k+2)(-6)+3\cdot 8=0\Leftrightarrow 10k-18k-12+24=0\Leftrightarrow -8k+12=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

γ) Έστω $\vec{\gamma}_1,\vec{\gamma}_2$ οι δύο κάθετες συνιστώσες με $\vec{\gamma}_1 // \vec{\alpha}$, στις οποίες αναλύθηκε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$



Επειδή $\vec{\gamma}_1 // \vec{\alpha}$, υπάρχει $\lambda\in R^*$, ώστε $\vec{\gamma}_1=\lambda\vec{\alpha}$ (4)

Επίσης: $\vec{\gamma}_1\perp\vec{\gamma}_2\Leftrightarrow \vec{\gamma}_1\vec{\gamma}_2=0$ (5)

και $\vec{\gamma}=\vec{\gamma}_1+\vec{\gamma}_2\Leftrightarrow \vec{\gamma}_2=\vec{\gamma}-\vec{\gamma}_1$ (6)

Η (6) λόγω της (4) γίνεται: $\vec{\gamma}_2=\vec{\gamma}-\lambda\vec{\alpha}$ (7)

Η (5) λόγω των (4) και (7) γράφεται:

$\lambda\vec{\alpha}(\vec{\gamma}-\lambda\vec{\alpha})=0\Leftrightarrow \lambda(\vec{\alpha}\vec{\gamma}-\lambda\vec{\alpha}^2)=0\overset{\lambda\neq 0}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \vec{\alpha}\vec{\gamma}-\lambda\vec{\alpha}^2=0\Leftrightarrow \lambda=\frac{\vec{\alpha}\vec{\gamma}}{\vec{\alpha}^2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda=\frac{(-1)3+2(-1)}{5}\Leftrightarrow \lambda=-1$

Η (4) για $\lambda=-1$ δίνει: $\vec{\gamma}_1=(-1)(-1,2)\Leftrightarrow \vec{\gamma}_1=(1,-2)$

Η (6) δίνει: $\vec{\gamma}_2=(3,-1)-(1,-2)\Leftrightarrow \vec{\gamma}_2=(2,1)$

ΘΕΜΑ 4ο:

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy, η εξίσωση ευθείας $(\lambda-1)x+(\lambda+1)y-\lambda-3=0$, όπου λ πραγματικός αριθμός, περιγράφει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ.

Μονάδες 8

β. Τρία πλοία βρίσκονται στα σημεία $K(2,2)$, $\Lambda(-1,5)$ και $M(1,3)$. Να βρείτε τις εξισώσεις των φωτεινών ακτίνων που διέρχονται από τα πλοία Κ, Λ, Μ.

Μονάδες 4,5

γ. Να υπολογίσετε ποιο από τα πλοία Κ και Λ βρίσκεται πλησιέστερα στη φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το πλοίο Μ.

Μονάδες 4,5

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της θαλάσσιας περιοχής που ορίζεται από το φάρο Φ και τα πλοία Λ και Μ.

Μονάδες 6,5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:

α. Η εξίσωση $(\lambda-1)x+(\lambda+1)y-\lambda-3=0$ (1) παριστάνει οικογένεια ευθειών η οποία περνάει από σταθερό σημείο (τον φάρο).

Η (1) για $\lambda=0$ δίνει: $-x+y-3=0$ (2)
Η (1) για $\lambda=1$ δίνει: $2y-4=0$ (3)
Η (3) δίνει $y=2$, ενώ η (2) δίνει $x=-1$

Άρα οι ευθείες (2) και (3) διέρχονται από το σημείο $(-1,2)$

Για $x=-1$ και $y=2$ η (1) γίνεται: $-\lambda+1+2\lambda+2-\lambda-3=0\Leftrightarrow 0=0$
Δηλαδή επαληθεύεται η (1) που σημαίνει ότι όλες οι ευθείες που έχουν εξίσωση την (1) περνούν από το σταθερό σημείο $\Phi(-1,2)$ (είναι ο φάρος).

β. Οι φωτεινές ακτίνες που διέρχονται από τα σημεία Κ, Λ και Μ είναι οι ευθείες ΦΚ, ΦΛ, ΦΜ.

- Είναι $\lambda_{\Phi K}=\dfrac{2-2}{2+1}=0$

Η εξίσωση της ΦΚ είναι: $\Phi K: y-2=0(x-2)\Leftrightarrow y=2$

- Τα σημεία Φ και Λ έχουν ίδια τετμημένη, άρα $\Phi\Lambda \,//\, y'y$, οπότε η εξίσωση της ΦΛ είναι $x=-1$

- $\lambda_{\Phi M}=\dfrac{3-2}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

Η εξίσωση της ΦΜ είναι: $\Phi M: y-2=\dfrac{1}{2}(x+1)\Leftrightarrow 2y-4=x+1\Leftrightarrow x-2y+5=0$ (ε_1)

γ. Είναι $d(K,\varepsilon_1)=\dfrac{|2-2\cdot 2+5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

$$d(\Lambda,\varepsilon_1)=\frac{|-1-2\cdot 5+5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

Άρα $d(K,\varepsilon_1)<d(\Lambda,\varepsilon_1)$, δηλαδή το πλοίο Κ βρίσκεται πιο κοντά από το πλοίο Λ στην φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το πλοίο Μ.

δ. Είναι $\vec{\Phi\Lambda}=(-1+1,\ 5-2)=(0,3)$

$$\vec{\Phi M}=(1+1,\ 3-2)=(2,1)$$

$$\det(\vec{\Phi\Lambda},\vec{\Phi M})=\begin{vmatrix}0 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-6$$

Το εμβαδόν του τριγώνου ΦΛΜ είναι: $E=\frac{1}{2}\left|\det(\vec{\Phi\Lambda},\vec{\Phi M})\right|=\frac{1}{2}|-6|=3$