ΘΕΜΑ 1ο

Α1. Να αποδείξετε ότι, σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του, ισούται με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα.

Μονάδες 6,5

Α2. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β**, έτσι ώστε να προκύπτει ισότητα.

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^\circ$) και ΑΔ το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. AB^2	**1.** $AB^2+B\Gamma^2$
β. $A\Gamma^2$	**2.** $\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$
γ. $\frac{AB^2}{A\Gamma^2}$	**3.** $\frac{\Gamma\Delta}{B\Delta}$
	4. $B\Gamma\cdot B\Delta$
	5. $B\Gamma^2-AB^2$
	6. $AB\cdot B\Gamma$

Μονάδες 6

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση για καθένα από τα ερωτήματα **Β1** και **Β2.**

Δίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^\circ$) με ύψος ΑΔ, για το οποίο έχουμε ΒΔ=1 και ΒΓ=3.

Β1. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΔ είναι:

α. 2 **β.** $\sqrt{3}$ **γ.** $\sqrt{2}$ **δ.** $3\sqrt{2}$

Μονάδες 6,5

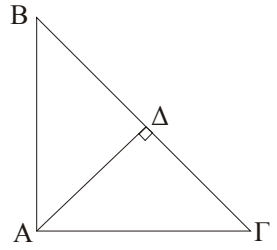
Β2. Το μήκος της πλευράς ΑΒ είναι:

α. $\sqrt{3}$ **β.** 3 **γ.** $\sqrt{2}$ **δ.** $\sqrt{5}$

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α.1. Θεώρημα 9.4 σελ. 211 σχολικού βιβλίου



Α.2.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. AB^2	**4.** $B\Gamma \cdot B\Delta$
β. $A\Gamma^2$	**5.** $B\Gamma^2 - AB^2$
γ. $\frac{AB^2}{A\Gamma^2}$	**2.** $\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$

Β.1. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΔ είναι:
γ. $\sqrt{2}$

<u>γιατί:</u> $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma = 1 \cdot 2 = 2$

Β.2. Το μήκος της πλευράς ΑΒ είναι:
α. $\sqrt{3}$

<u>γιατί:</u> $AB^2 = B\Delta \cdot B\Gamma = 1 \cdot 3 = 3$

<u>ΘΕΜΑ 2ο</u>

Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ΑΒ=6, ΒΓ=12 και ΓΑ=8.

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι αμβλυγώνιο.

Μονάδες 7

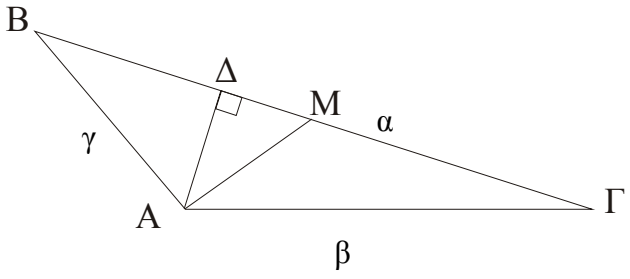
β. Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ.

Μονάδες 9

γ. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της διαμέσου ΑΜ στην πλευρά ΒΓ.

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



α.

$$\left.\begin{array}{l} B\Gamma^2 = 12^2 = 144 \\ AB^2 + A\Gamma^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \end{array}\right\} \begin{array}{l} B\Gamma^2 > AB^2 + A\Gamma^2 \\ \hat{A} > 90^O \end{array}$$

β. $\mathrm{AM}^2 = \dfrac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} = \dfrac{128 + 72 - 144}{4} = \dfrac{56}{4} = 14$

$\mathrm{AM} = \sqrt{14}$

γ. $\Delta\mathrm{M} = \pi\rho o\beta_\alpha \mu_\alpha = \dfrac{\beta^2 - \gamma^2}{2\alpha} = \dfrac{64 - 36}{2 \cdot 12} = \dfrac{7}{6}$

ΘΕΜΑ 3ο

Θεωρούμε τρεις διαδοχικές γωνίες $\hat{xOy}$, $\hat{yOz}$, $\hat{zOx}$ έτσι ώστε $\hat{xOy}$ = $\hat{yOz}$ =150°. Στις ημιευθείες Ox, Oy, Oz παίρνουμε τα σημεία Α, Β, Γ αντίστοιχα έτσι ώστε ΟΑ=2, ΟΒ=4 και ΟΓ=6.

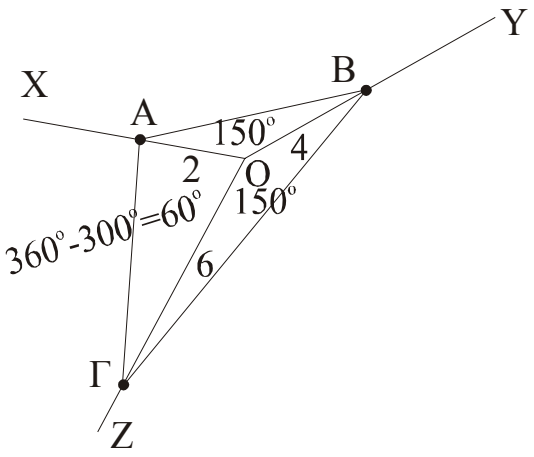
α. Να υπολογίσετε το εμβαδό $\mathrm{E}_{\mathrm{O\Gamma A}}$ του τριγώνου ΟΓΑ.

Μονάδες 12

β. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\dfrac{\mathrm{E}_{\mathrm{OAB}}}{\mathrm{E}_{\mathrm{OB\Gamma}}}$.

Μονάδες 13

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



α. $(\mathrm{O\Gamma A}) = \dfrac{1}{2}\mathrm{O\Gamma} \cdot \mathrm{OA} \cdot \eta\mu 60^o = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}\tau.\mu.$

β. Επειδή $\hat{\mathrm{O}}_1 = \hat{\mathrm{O}}_2$ παίρνουμε τον λόγο των εμβαδών:

$\dfrac{(\mathrm{OAB})}{(\mathrm{OB\Gamma})} = \dfrac{\mathrm{OA} \cdot \mathrm{OB}}{\mathrm{OB} \cdot \mathrm{O\Gamma}} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ημικύκλιο κέντρου Ο και διαμέτρου ΑΒ=2R. Στην προέκταση του ΑΒ προς το Β, θεωρούμε ένα σημείο Γ, τέτοιο ώστε ΒΓ=2R. Από το Γ φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΓΕ του ημικυκλίου. Η εφαπτομένη του ημικυκλίου στο σημείο Α τέμνει την προέκταση του τμήματος ΓΕ στο σημείο Δ.

α. Να αποδείξετε ότι ΓΕ = $2\sqrt{2}$ R .

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι ΓΑ·ΓΟ=ΓΔ·ΓΕ .

Μονάδες 10

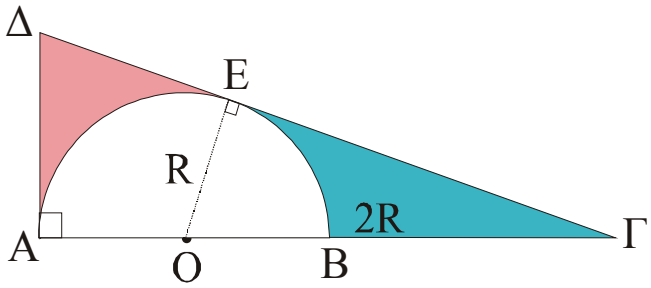
γ. Να υπολογίσετε το τμήμα ΓΔ συναρτήσει του R.

Μονάδες 5

δ. Να υπολογίσετε το άθροισμα των εμβαδών των μικτόγραμμων τριγώνων ΒΓΕ και ΑΔΕ συναρτήσει του R.

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ



α. $\Gamma E^2 = \Gamma O^2 - OE^2 = (3R)^2 - R^2 = 8R^2$

$\Gamma E = 2\sqrt{2}R$

β. Το ΟΑΔΕ είναι εγγράψιμο διότι $\hat{A} + \hat{E} = 180^O$.
Εφαρμόζοντας το θεώρημα για τις τέμνουσες από το σημείο Γ εκτός κύκλου έχουμε:
ΓΟ · ΓΑ = ΓΕ · ΓΔ

γ. $\Gamma\Delta = \frac{\Gamma O \cdot \Gamma A}{\Gamma E} = \frac{3R \cdot 4R}{2\sqrt{2}R} = \frac{6R\sqrt{2}}{2} = 3R\sqrt{2}$

δ. $A\Delta^2 = \Gamma\Delta^2 - A\Gamma^2 = 18R^2 - 16R^2 = 2R^2$

$A\Delta = R\sqrt{2}$

Το άθροισμα των εμβαδών των μικτόγραμμων τριγώνων ΒΓΕ και ΑΔΕ είναι:

$$E = E_{A\Gamma\Delta} - E_{\eta\mu.} = \frac{A\Gamma \cdot A\Delta}{2} - \frac{\pi R^2}{2} = \frac{4R \cdot R\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi R^2}{2} = \frac{(4\sqrt{2} - \pi)R^2}{2}$$