

ΘΕΜΑ 1ο**A.1.** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 .Να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Μονάδες 7,5

A.2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει:

α. $|z|^2 = z \bar{z}$

β. $|z^2| = z^2$

γ. $|z| = -|\bar{z}|$

δ. $|z| = |\bar{z}|$

ε. $|i \bar{z}| = |z|$

Μονάδες 5

B.1. Αν $z_1 = 3 + 4i$ και $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$, να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της **Στήλης Β** έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $ z_1 \cdot z_2 $	α. 4
2. $ z_1^2 $	β. 2
3. $ z_2 ^2$	γ. 25
4. $- \bar{z}_1 $	δ. -5
5. $ i z_2 $	ε. -2
	στ. 5
	ζ. 10

Μονάδες 7,5

B.2. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|=1$, να δείξετε ότι $\frac{\bar{z}}{z} = \frac{1}{z}$.

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ**A.1.** Θεωρία σχολικού βιβλίου.**A.2. α.** $|z|^2 = z\bar{z}$ **Σωστό**

β. $|z^2| = z^2$ **Λάθος**

γ. $|z| = -|\bar{z}|$ **Λάθος**

δ. $|z| = |\bar{z}|$ **Σωστό**

ε. $|i\bar{z}| = |z|$ **Σωστό**

B.1. $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$

1. $|z_1 \cdot z_2|$ \rightarrow **ζ.** 10

2. $|z_1^2|$ \rightarrow **γ.** 25

3. $|z_2|^2$ \rightarrow **α.** 4

4. $-\|\bar{z}_1\|$ \rightarrow **δ.** -5

5. $|iz_2|$ \rightarrow **β.** 2

B.2. **Αφού** $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z \cdot \bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & x \leq 3 \\ \frac{1 - e^{x-3}}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$$

α. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι $a = -1/9$.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(4, f(4))$.

Μονάδες 7

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & x \leq 3 \\ \frac{1 - e^{x-3}}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$$

α. Αφού η f είναι συνεχής (άρα και στο $x_0 = 3$), θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3)$$

έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (\alpha x^2) = \alpha \cdot 3^2 = 9\alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - e^{x-3} \binom{0}{0}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(1 - e^{x-3})'}{(x-3)'} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-e^{x-3} \cdot (x-3)'}{1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} [-e^{x-3}] = -1$$

$$f(3) = 9\alpha$$

Άρα $9\alpha = -1$ οπότε $\alpha = -\frac{1}{9}$

β. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(4, f(4))$ είναι:

$$(\varepsilon) : y - f(4) = f'(4)(x - 4)$$

έχουμε: $f(4) = \frac{1 - e^{4-3}}{4-3} = 1 - e$

- Για $x > 3$ έχουμε $f(x) = \frac{1 - e^{x-3}}{x-3}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1 - e^{x-3})' \cdot (x-3) - (1 - e^{x-3}) \cdot (x-3)'}{(x-3)^2} = \frac{-e^{x-3} \cdot (x-3) - 1 + e^{x-3}}{(x-3)^2} = \\ &= \frac{-e^{x-3} \cdot x + 3e^{x-3} - 1 + e^{x-3}}{(x-3)^2} = \frac{4e^{x-3} - xe^{x-3} - 1}{(x-3)^2} \end{aligned}$$

άρα $f'(4) = \frac{4e^{4-3} - 4e^{4-3} - 1}{(4-3)^2} = -1$

Άρα (ε) : $y - (1 - e) = -1(x - 4)$
 $y - 1 + e = -x + 4$
 $y = -x + 5 - e$

γ) Θεωρούμε το $\alpha = -\frac{1}{9}$

Στο διάστημα που ολοκληρώνουμε η συνάρτηση έχει τύπο $f(x) = -\frac{1}{9}x^2 < 0$

$$E = -\frac{1}{9} \int_1^2 -x^2 dx = \frac{1}{9} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{1}{9} \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{27} \tau.μ.$$

Προσδιορίσαμε το εμβαδόν του χωρίου για $\alpha = -\frac{1}{9}$. Επειδή δεν διευκρινίζεται αν θέλει το εμβαδόν για την τιμή $\alpha = -\frac{1}{9}$ ή για κάθε τιμή του α , έχουμε:

1. αν $\alpha = 0$ δεν υπολογίζουμε το εμβαδόν αφού $f(x) = 0$ στο $[1, 2]$
2. αν $\alpha \neq 0$ τότε $E = |\alpha| \int_1^2 x^2 dx = |\alpha| \frac{7}{3} \tau.μ.$

ΘΕΜΑ 3ο

Για μια συνάρτηση f , που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} , ισχύει ότι:

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 8

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$f^3(x) + \beta \cdot f^2(x) + \gamma \cdot f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη έχουμε:

$$3f^2(x) \cdot f'(x) + 2\beta \cdot f(x) \cdot f'(x) + \gamma \cdot f'(x) = 3x^2 - 4x + 6$$

$$f'(x)[3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma] = 3x^2 - 4x + 6 \quad (1)$$

Θέτω $f(x) = y$ οπότε θεωρώντας τη συνάρτηση $g(y) = 3y^2 + 2\beta y + \gamma$

η $\Delta = 4\beta^2 - 12\gamma = 4(\beta^2 - 3\gamma) < 0$ από υπόθεση.

Άρα για κάθε $y \in \mathbb{R}$ $g(y) > 0$ και επειδή $3x^2 - 4x + 6 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού $\Delta' = 16 - 72 = -56 < 0$

Από την (1) συμπεραίνουμε ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε:

α) Δεν έχει ακρότατα αφού $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (από θ. Fermat).

β) Και η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

γ) \Rightarrow Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ αφού είναι παραγωγίσιμη.

\Rightarrow Για $x = 0$ η δοσμένη σχέση γίνεται:

$$f^3(0) + \beta \cdot f^2(0) + \gamma \cdot f(0) = -1 \quad \text{ή}$$
$$f(0)[f^2(0) + \beta \cdot f(0) + \gamma] = -1$$

Επειδή $f^2(0) + \beta \cdot f(0) + \gamma > 0$
Άρα $f(0) < 0$

$$\text{Όμοια } f^3(1) + \beta \cdot f^2(1) + \gamma \cdot f(1) = 4$$
$$f(1)[f^2(1) + \beta \cdot f(1) + \gamma] = 4$$

Επειδή $f^2(1) + \beta \cdot f(1) + \gamma > 0$
Άρα $f(1) > 0$

Οπότε $f(0) \cdot f(1) < 0$

Άρα από θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα $x_0 \in (0, 1)$
της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Επίσης επειδή η f γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} , άρα και στο $(0, 1)$ η f είναι "1-1" άρα η ρίζα είναι μοναδική στο $(0, 1)$.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f , συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} , για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

i) $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) $f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t f^2(xt) dt$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α. Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x) = -2xf^2(x)$

Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

Μονάδες 4

γ. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Μονάδες 4

δ. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x f(x) \eta \mu 2x)$.

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

α) Θέτω $u = xt$

Τότε $du = x \cdot dt$

$$u_1 = x \cdot 0 = 0$$

$$u_2 = x \cdot 1 = x$$

$$f(x) = 1 - 2 \int_0^1 x^2 \cdot t \cdot f^2(xt) dt = 1 - 2 \int_0^1 x \cdot t \cdot f^2(xt) \cdot x dt$$

$$\text{άρα } f(x) = 1 - 2 \int_0^x u f^2(u) du$$

$$\text{επομένως } f'(x) = -2xf^2(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

β) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$g'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} - 2x = -\frac{-2xf^2(x)}{f^2(x)} - 2x = 2x - 2x = 0$$

Άρα η συνάρτηση g είναι σταθερή.

γ) Από ερώτημα α) έχουμε:

$$f'(x) = -2xf^2(x) \quad \text{ή}$$

$$\frac{-f'(x)}{f^2(x)} = 2x$$

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = 2x$$

$$\text{άρα } \int \left(\frac{1}{f(x)}\right)' dx = \int 2x dx \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = x^2 + c \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x^2 + c}$$

$$\text{Όμως } f(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{0^2 + c} = 1 \Leftrightarrow c = 1$$

$$\text{Επομένως } f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

γ) Έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot f(x) \cdot \eta\mu 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \frac{1}{x^2 + 1} \eta\mu 2x\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} \eta\mu 2x$

$$\text{όμως } \left| \frac{x}{x^2 + 1} \cdot \eta\mu 2x \right| \leq \left| \frac{x}{x^2 + 1} \right|$$

$$-\frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{x}{x^2 + 1} \eta\mu 2x \leq \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$\text{Επειδή } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2 + 1} = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

άρα από κριτήριο παρεμβολής έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} \cdot \eta\mu 2x = 0$