Γ΄ ΤΑΞΗ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 28 ΜΑΪΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Ας υποθέσουμε ότι $x_1, x_2, \ldots, x_k$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής Χ, που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν, όπου k,ν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί με $k \leq \nu$.

α. Τι ονομάζεται απόλυτη συχνότητα ν_i, που αντιστοιχεί στην τιμή x_i, i = 1,2,…,k;

Μονάδες 3

β. Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i,
i = 1,2,…,k;

Μονάδες 3

γ. Να αποδείξετε ότι:

i) $0 \leq f_i \leq 1$ για i = 1,2,…,k

ii) $f_1 + f_2 + \ldots + f_k = 1$.

Μονάδες 4

Β.1. Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Μονάδες 8

Β.2. α. Να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου Α κάποιου δειγματικού χώρου Ω.

Μονάδες 5

β. Να δώσετε τις αριθμητικές τιμές των παρακάτω πιθανοτήτων:

i) $P(\Omega)$ ii) $P(\varnothing)$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Γ΄ ΤΑΞΗ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

Μονάδες 4

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

Μονάδες 4

γ. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της f.

Μονάδες 7

δ. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της καμπύλης της συνάρτησης f που είναι παράλληλες στην ευθεία y = 2x + 5.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Ένα προϊόν πωλείται σε 10 διαφορετικά καταστήματα στις παρακάτω τιμές, σε Ευρώ:
8, 10, 13, 13, 15, 16, 18, 14, 14, 9.

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την επικρατούσα τιμή.

Μονάδες 6

β. Να υπολογίσετε το εύρος, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής.

Μονάδες 6

γ. Αν οι τιμές του προϊόντος σε όλα τα καταστήματα υποστούν έκπτωση 10%, να εξετάσετε αν θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω Α,Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) + P(B) \neq 2P(A \cap B)$.

Δίνεται ακόμα η συνάρτηση:

$$f(x) = (x - P(A \cup B))^3 - (x - P(A \cap B))^3 , \quad x \in R.$$

α. Να δείξετε ότι $P(A \cap B) \neq P(A \cup B)$.

Μονάδες 5

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f(x) παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $x = \frac{P(A)+P(B)}{2}$.

Μονάδες 13

γ. Εάν τα ενδεχόμενα Α, Β είναι ασυμβίβαστα, να δείξετε ότι f(P(A)) = f(P(B)).

Μονάδες 7

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μια (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Σχολικό Βιβλίο σελ. 65

Β.1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 150

Β.2. α. Σχολικό Βιβλίο σελ. 148
β. Σχολικό Βιβλίο σελ. 149

ΘΕΜΑ 2ο

α. Πρέπει $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

Άρα $A = R - \{-1\}$

β. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x}{x+1} = \dfrac{2\cdot 3}{3+1} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

γ. $f'(x) = \dfrac{(2x)'(x+1) - 2x(x+1)'}{(x+1)^2} = \dfrac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$

δ. Πρέπει $f'(x_0) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{2}{(x_0+1)^2} = 2 \Leftrightarrow (x_0+1)^2 = 1 \Leftrightarrow {x_0}^2 + 2x_0 + 1 = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x_0(x_0+2) \Leftrightarrow x_0 = \begin{cases} 0 \\ -2 \end{cases}$$

- $\boxed{x_0 = 0}$ $\qquad f(x_0) = f(0) = \dfrac{2\cdot 0}{0+1} = 0$

Άρα η ευθεία διέρχεται από το σημείο Ο(0,0).

Επομένως (ε_1): $y = 2x$.

- $\boxed{x_0 = -2}$ $\quad f(x_0) = f(-2) = \dfrac{2(-2)}{-2+1} = 4$

Άρα η ευθεία διέρχεται από το Κ(-2, 4).

Είναι (ε_2): $y = 2x + \beta$.

Επειδή διέρχεται από το σημείο Κ θα ισχύει: $4 = 2\cdot(-2) + \beta \Leftrightarrow \beta = 8$

Επομένως (ε_2): $y = 2x + 8$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $\bar{x} = \dfrac{8+10+13+13+15+16+18+14+14+9}{10} = \dfrac{130}{10} = 13$

8, 9, 10, 13, 13, 14, 14, 15, 16, 18

Επειδή ν = 10 άρτιος διάμεσος θα είναι:

$\delta = \dfrac{5^{\eta}\pi\alpha\rho. + 6^{\eta}\pi\alpha\rho.}{2}$ άρα $\delta = \dfrac{13+14}{2} = 13{,}5$

$M_0 = 13$, $M_0 = 14$ (δικόρυφη)

β. R = 18 – 8 = 10

$$S^2 = \frac{(8-13)^2 + (9-13)^2 + (10-13)^2 + 2(13-13)^2 + 2(14-13)^2 + (15-13)^2 + (16+13)^2 + (18-13)^2}{10} =$$

$$= \frac{25+16+9+2+4+9+25}{10} = \frac{90}{10} = 9$$

$S_x = \sqrt{9} = 3$

$CV_x = \dfrac{S_x}{\bar{x}} = \dfrac{3}{13} \approx 0{,}23$ ή περίπου 23%

γ. Αν x_i οι τιμές πριν την έκπτωση, y_i μετά την έκπτωση, θα ισχύει:

$y_i = x_i - 0{,}1x_i = 0{,}9x_i$, i = 1, 2, …, 10

Σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή θα ισχύουν:

$\bar{y} = 0{,}9 \cdot \bar{x}$

$S_{\psi} = |0{,}9| S_x = 0{,}9 \cdot S_x$

Άρα $CV_{\Psi} = \frac{S_{\Psi}}{\bar{y}} = \frac{0{,}9 \cdot S_x}{0{,}9 \cdot \bar{x}} = CV_x$ οπότε ο συντελεστής μεταβολής δεν μεταβάλλεται.

ΘΕΜΑ 4ο

α. $P(A) + P(B) \neq 2\,P(A \cap B)$ (1)

Από προσθετικό νόμο πιθανοτήτων έχουμε:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A) + P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$

Οπότε από σχέση (1) $\Rightarrow P(A \cup B) + P(A \cap B) \neq 2P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) \neq P(A \cap B)$

β. $f(x) = (x - P(A \cup B))^3 - (x - P(A \cap B))^3,\ x \in R$

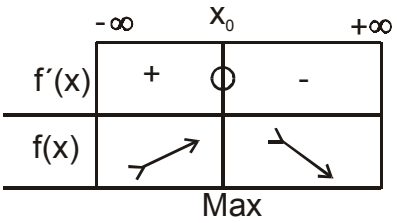
Η f παραγωγίσιμη στο R με

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x - P(A \cup B))^2 \cdot (x - P(A \cup B))' - 3(x - P(A \cap B))^2 (x - P(A \cap B))' = \\ &= 3(x - P(A \cup B))^2 - 3(x - P(A \cap B))^2 = \\ &= 3\left[(x - P(A \cup B))^2 - (x - P(A \cap B))^2\right] = \\ &= 3(x - P(A \cup B) + x - P(A \cap B))(x - P(A \cup B) - x + P(A \cap B)) = \\ &= 3(2x - P(A \cup B) - P(A \cap B))(P(A \cap B) - P(A \cup B)) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(2x - P(A \cup B) - P(A \cap B))(P(A \cap B) - P(A \cup B)) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x - P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0 \Leftrightarrow 2x = P(A \cup B) + P(A \cap B) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{P(A) + P(B)}{2}$$

Επειδή $A \cap B \subseteq A \cup B$ έχουμε $P(A \cap B) \leq P(A \cup B)$.
Όμως από ερώτημα (α) $P(A \cap B) \neq P(A \cup B)$ άρα $\underline{P(A \cap B) < P(A \cup B)}$

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow 3(2x - P(A \cup B) - P(A \cap B))(P(A \cap B) - P(A \cup B)) > 0 \\ &\Leftrightarrow 2x - P(A \cup B) - P(A \cap B) < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x < \frac{P(A) + P(B)}{2} \end{aligned}$$



Άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = \frac{P(A)+P(B)}{2}$

γ. Τα A, B είναι ασυμβίβαστα, άρα: $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$
και $P(A\cap B) = 0$

$f(P(A)) = (P(A) - P(A\cup B))^3 - (P(A) - P(A\cap B))^3 =$
$= (P(A) - P(A) - P(B))^3 - (P(A))^3 = -(P(B))^3 - (P(A))^3$

$f(P(B)) = (P(B) - P(A\cup B))^3 - (P(B) - P(A\cap B))^3 =$
$= (P(B) - P(A) - P(B))^3 - (P(B))^3 = -(P(A))^3 - (P(B))^3$

Άρα $f(P(A)) = f(P(B))$

Επιμέλεια Θεμάτων: Νίκος Δακουτρός, Τάκης Δρούτσας,
Διαμαντής Νικολάου, Δημήτρης Χατζόπουλος,
Χρήστος Χρηστίδης, Πέτρος Κουνούκλας
Μαθηματικοί