ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2005
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α1. θεωρία σελ. 194

Α2. θεωρία σελ. 280

Β. α → Λ
β → Λ
γ → Σ
δ → Σ
ε → Λ
στ → Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α. Αφού $|z_1| = 3$ ισχύει $|z_1|^2 = 9$

$$z_1\bar{z}_1 = 9$$

$$\bar{z}_1 = \frac{9}{z_1}$$

β. **1ος τρόπος**

Από το πρώτο ερώτημα έχουμε $z_1 = \dfrac{9}{\bar{z}_1}$ και $z_2 = \dfrac{9}{\bar{z}_2}$ επειδή $|z_1| = |z_2| = 3$.

Η σχέση γίνεται $\dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{\frac{9}{\bar{z}_1}}{\frac{9}{\bar{z}_2}} = \dfrac{z_1}{z_2} + \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \dfrac{z_1}{z_2} + \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} \in \Re$ ως άθροισμα συζυγών.

2ος τρόπος

θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $z \in \Re$ αν και μόνο αν $z = \bar{z}$ αφού πρώτα την αποδείξουμε.

Έστω $z = x + yi$ άρα $z = \bar{z} \Leftrightarrow x + yi = x - yi \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z \in \Re$.

Για να δείξουμε ότι $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}\in\Re$ αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}\right)}$

Έχουμε $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}+\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1}=\frac{\frac{9}{z_1}}{\frac{9}{z_2}}+\frac{\frac{9}{z_2}}{\frac{9}{z_1}}=\frac{z_2}{z_1}+\frac{z_1}{z_2}$ άρα $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}\in\Re$

γ. **1ος τρόπος**

$|z_1+z_2+z_3|=\left|\overline{z_1+z_2+z_3}\right|=|\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3|=\left|\frac{9}{z_1}+\frac{9}{z_2}+\frac{9}{z_3}\right|=9\left|\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right|=$

$=9\left|\frac{z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2}{z_1z_2z_3}\right|=9\frac{|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{|z_1|\cdot|z_2|\cdot|z_3|}=9\frac{|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|}{27}=$

$=\frac{1}{3}|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|$

2ος τρόπος

$\frac{1}{3}|z_2z_3+z_1z_3+z_1z_2|=\frac{1}{3}\left|\frac{9}{\bar{z}_1}\cdot\frac{9}{\bar{z}_2}+\frac{9}{\bar{z}_2}\cdot\frac{9}{\bar{z}_3}+\frac{9}{\bar{z}_3}\cdot\frac{9}{\bar{z}_1}\right|=$

$\frac{81}{3}\left|\frac{1}{\bar{z}_1\bar{z}_2}+\frac{1}{\bar{z}_2\bar{z}_3}+\frac{1}{\bar{z}_3\bar{z}_1}\right|=27\frac{|\bar{z}_3+\bar{z}_2+\bar{z}_1|}{|\bar{z}_1|\cdot|\bar{z}_2|\cdot|\bar{z}_3|}=27\frac{\left|\overline{z_1+z_2+z_3}\right|}{27}=\left|\overline{z_1+z_2+z_3}\right|=$

$|z_1+z_2+z_3|$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ με $f'(x)=\lambda\cdot e^{\lambda x}>0$, για κάθε $x\in\Re,\lambda>0$.
Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα

β. Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $M(x_0,f(x_0))$ είναι:

$\psi-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$\psi-e^{\lambda x_0}=\lambda e^{\lambda x_0}(x-x_0)$

Επειδή διέρχεται από το O(0,0) προκύπτει

$0-e^{\lambda x_0}=\lambda e^{\lambda x_0}(0-x_0)$

$-e^{\lambda x_0}=-\lambda x_0 e^{\lambda x_0}$, $e^{\lambda x_0}\neq 0$ προκύπτει

$\lambda x_0=1$

$x_0=\frac{1}{\lambda}$

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$\psi-e^{1}=\lambda e^{1}(x-\frac{1}{\lambda})$

$\psi-e=\lambda ex-e$

$\psi = \lambda e x$

και το σημείο επαφής είναι το $M\left(\dfrac{1}{\lambda}, e\right)$

γ. Επειδή $f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} > 0$, $x \in \Re$ η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, οπότε από τον ορισμό της κυρτότητας ισχύει $f(x) > \lambda e x$

Άρα $f(x) - \lambda e x > 0$, $x \in \Re$

Συνεπώς $E(\lambda) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\lambda}} \left(e^{\lambda x} - \lambda e x\right) dx = \left[\frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} - \frac{\lambda e x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{\lambda}} =$

$= \dfrac{1}{\lambda} e^1 - \dfrac{e}{2\lambda} - \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{e-2}{2\lambda}$ τ.μ.

δ. $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda^2 E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda} = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda^2 \frac{e-2}{2\lambda}}{2 + \eta\mu\lambda} = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda(e-2)}{4 + 2\eta\mu\lambda} = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{e-2}{\frac{4 + 2\eta\mu\lambda}{\lambda}}$ (1)

Είναι $\left|\dfrac{4 + \eta\mu\lambda}{\lambda}\right| = \dfrac{|4 + \eta\mu\lambda|}{|\lambda|} \le \dfrac{6}{|\lambda|} \Leftrightarrow$

$-\dfrac{6}{|\lambda|} \le \dfrac{4 + 2\eta\mu\lambda}{\lambda} \le \dfrac{6}{|\lambda|}$

Όμως $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \left(-\frac{6}{|\lambda|}\right) = \lim_{\lambda \to +\infty} \frac{6}{|\lambda|} = 0$ οπότε από κριτήριο παρεμβολής

$\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{4 + 2\eta\mu\lambda}{\lambda} = 0$

Επίσης είναι $2 \le 4 + 2\eta\mu\lambda \le 6$ και λ>0

Επειδή $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{4 + 2\eta\mu\lambda}{\lambda} = 0$ και $\dfrac{4 + 2\eta\mu\lambda}{\lambda} > 0$

θα έχουμε από την (1)

$\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda^2 E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda} = +\infty$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Είναι $2f'(x) = e^{x - f(x)}$, $x \in \Re$

οπότε $2f'(x) = \dfrac{e^x}{e^{f(x)}}$

$$\left(2e^{f(x)}\right)' = \left(\frac{e^x}{2}\right)'$$

Άρα από πόρισμα των συνεπειών του θεωρήματος μέσης τιμής υπάρχει $c \in \Re$ ώστε:

$$e^{f(x)} = \frac{e^x}{2} + c$$

$$e^{f(x)} = \frac{e^x}{2} + \frac{1}{2}$$

$$e^{f(x)} = \frac{e^x + 1}{2}$$

Για x = 0

$$e^{f(0)} = \frac{e^0}{2} + c$$

$$e^0 = \frac{e^0}{2} + c$$

$$1 = \frac{1}{2} + c$$

$$c = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \ln\frac{e^x + 1}{2}, x \in \Re$$

β. Θεωρούμε $F(x) = \int_0^x f(x-t)dt$

θέτουμε $u = x - t$

$du = -dt$

Για $t = 0, u = x$

Για $t = x, u = 0$

Άρα $F(x) = -\int_x^0 f(u)du = \int_0^x f(u)du$ Η F παραγωγίσιμη άρα και συνεχής.

$$\lim_{x\to 0} F(x) = \lim_{x\to 0}\int_0^x f(u)du = F(0) = \int_0^0 f(u)du = 0$$

$\lim_{x\to 0} \eta\mu x = 0$ από θεώρημα Del Hospital

Επειδή $F'(x) = f(x)$ και $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{0}{1} = 0$$

άρα $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x F(u)du}{\eta\mu x} = 0$

γ. $h(x) = \int_{-x}^{\alpha} t^{2005} f(t)dt + \int_{\alpha}^{x} t^{2005} f(t)dt =$

$= -\int_{\alpha}^{-x} t^{2005} f(t)dt + \int_{\alpha}^{x} t^{2005} f(t)dt$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ με $h'(x) = -(-x)^{2005} f(-x)\cdot(-x)' + x^{2005} f(x) =$

$= -x^{2005} f(-x) + x^{2005} f(x) =$

$= x^{2005}\left(-f(-x) + f(x)\right)$

Όμως $f(-x) = \ln\left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right) = \ln\left(\frac{1+\frac{1}{e^x}}{2}\right)$

$= \ln\left(\frac{e^x+1}{2e^x}\right) = \ln\frac{e^x+1}{2} - \ln e^x = \ln\frac{e^x+1}{2} - x = f(x) - x$

Άρα $h'(x) = x^{2005}\cdot\left(-f(x)+x+f(x)\right) = x^{2006}$

Επίσης $g'(x) = x^{2006}$

Άρα $h'(x) = g'(x)$ από πόρισμα των συνεπειών του θεωρήματος μέσης τιμής (σελ. 251) $h(x) = g(x) + c_0$, όπου $c_o \in \Re$.

Όμως επειδή για x = 0 είναι h(0) = 0 και g(0) = 0 θα είναι c_o = 0. Επομένως h(x) = g(x) για κάθε $x \in \Re$.

δ. Η εξίσωση $\int_{-x}^{x} t^{2005} f(t)dt = \frac{1}{2008}$ ισοδύναμα γράφεται:

$h(x) = \frac{1}{2008} \overset{(\gamma)}{\Leftrightarrow} g(x) = \frac{1}{2008} \Leftrightarrow \frac{x^{2007}}{2007} = \frac{1}{2008} \Leftrightarrow 2008\cdot x^{2007} - 2007 = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = 2008\cdot x^{2007} - 2007$, $x \in \Re$

Η φ στο [0,1] είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

φ(0) = -2007 < 0 , φ(1) = 2008 – 2007 = 1 >0 δηλαδή $\varphi(0)\cdot\varphi(1) < 0$

Οπότε από θεώρημα Bolzano η εξίσωση φ(x) = 0 έχει τουλάχιστον μία λύση στο (0,1). Όμως επειδή η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$, άρα και ένα προς ένα, η λύση είναι **μοναδική**.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ:
ΔΑΚΟΥΤΡΟΣ ΝΙΚΟΣ
ΔΡΟΥΤΣΑΣ ΤΑΚΗΣ
ΝΙΚΟΛΑΟΥ ΔΙΑΜΑΝΤΗΣ

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ

Τα σημερινά θέματα των μαθηματικών θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης είναι επιστημονικά τεκμηριωμένα σε όλο το εύρος της εξεταστέας ύλης και απευθύνονται σε πολύ καλά προετοιμασμένους υποψήφιους.