ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 27 ΜΑΪΟΥ 2006
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 253

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 273

Β. α $\to$ Λ
β $\to$ Σ
γ $\to$ Σ
δ $\to$ Λ
ε $\to$ Σ

ΘΕΜΑ 2

α) $f'(x) = 2(x-2)$ / $[2,+\infty]$
$f'(x) > 0$, $x \in [2,+\infty]$
και f συνεχής $[2,+\infty]$
Η f γνησίως αύξουσα στο $[2,+\infty]$ άρα και 1 - 1

β) Επειδή f 1 – 1 αντιστρέψιμη στο $f([2,+\infty])$
$y = x^2 - 4x + 6$
$x^2 - 4x + 6 - y = 0$
$\Delta = 4(y-2)$
$x = 2 + \sqrt{y-2}$ $y \geq 2$
ή
$x = 2 - \sqrt{y-2}$
$x \geq 2$ $2 + \sqrt{y-2} \geq 2$
$\sqrt{y-2} \geq 0$ που ισχύει.

$2 - \sqrt{y-2} \geq 2$
$-\sqrt{y-2} \geq 0$
$\sqrt{y-2} \leq 0$ Αδύνατο

$\boxed{f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-2} \ , \ x \geq 2}$

γ) i) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$, οι εξισώσεις $f(x) = x$, $f^{-1}(x) = x$, $f(x) = f^{-1}(x)$ είναι ισοδύναμες.

Για να βρούμε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f και C_f^{-1} με την $y = x$ αρκεί να λύσω μία από αυτές.

$x^2 - 4x + 6 = x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 3$

δηλαδή τα κοινά σημεία είναι τα $A(2,f(2))$, $B(3,f(3))$

δηλ $A(2,2)$, $B(3,3)$

ii) Επειδή C_f και C_f^{-1} εμφανίζουν συμμετρία ως προς τον άξονα $y = x$ υπολογίζουμε αρχικά το εμβαδόν του χωρίου E_1 που δημιουργείται από την (C_f, $y = x$, $x = 2$, $x = 3$)

παιρνω τη διαφορά.

$h(x) = x - (x^2 - 4x + 6) = -x^2 + 5x - 6$ / $[2,3]$

$h(x) \geq 0$ άρα $E_1 = \int_2^3 (-x^2 + 5x - 6)dx = \frac{1}{6}$ TM

Άρα $E = 2E_1 = \frac{1}{3}$ TM

ΘΕΜΑ 3

α) i) Αποδεικνύουμε $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = |z_3 - z_1|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = (z_3 - z_1)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_2 = z_3\bar{z}_3 - z_3\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_3 + z_1\bar{z}_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{|z_1|^2} - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + \cancel{|z_2|^2} = \cancel{|z_3|^2} - z_3\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_3 + \cancel{|z_1|^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = \bar{z}_1 z_3 + z_1\bar{z}_3$ (1)

Από την υπόθεση έχουμε $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ άρα

$z_1 + z_2 = -z_3$

$|z_1 + z_2| = |-z_3|$

$|z_1 + z_2|^2 = |z_3|^2$

$(z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = 1$

$z_1\bar{z}_1 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + z_2\bar{z}_2 = 1$

$|z_1|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 + |z_2|^2 = 1$

$z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = -1$

όμοια $\bar{z}_1 z_3 + z_1\bar{z}_3 = -1$

οπότε η (1) ισχύει

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι $|z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$

άρα ισχύει $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$

ii) $|z_1 - z_2|^2 \le 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \le 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 + z_2\bar{z}_2 \le 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 \le 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \ge -2$

όμως $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = -1$ (από **i)** ερώτημα) άρα

$-1 \ge -2$ ισχύει

$\boxed{\text{Β τρόπος}}$

Από τριγωνική ανισότητα ισχύει

$|z_1 - z_2| = |z_1 + (-z_2)| \le |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2| = 2$ δηλαδή

$|z_1 - z_2| \le 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 \le 4 \Leftrightarrow$

$$\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = \frac{z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2}}{2} = \frac{z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2}{2} = -\frac{1}{2} \ge -1$$

διότι $z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = -1$ από **α i)** ερώτημα

β) Έστω $A(z_1)$ $B(z_2)$ $\Gamma(z_3)$

Αφού $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, τα Α, Β, Γ ανήκουν σε κύκλο κέντρου Ο(0,0) και ακτίνας ρ = 1. Επίσης από $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ ΑΒ = ΒΓ = ΑΓ

άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο.

ΘΕΜΑ 4

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$$

α) $A = A_1 \cup A_2 = (0,1) \cup (1,+\infty)$

$$f'(x) = -\frac{x^2+1}{x(x-1)^2} < 0 \text{ στα } A_1,\ A_2$$

οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_1 = (0\ ,\ 1)$

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_2 = (1\ ,\ +\infty)$

επομένως το σύνολο τιμών είναι το $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2)$

όπου $f(A_1) = \left(\lim\limits_{x\to 1^-} f(x), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right) = (-\infty, +\infty)$

$f(A_2) = \left(\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\right) = (-\infty, +\infty)$

β) Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα είναι και 1-1 με σύνολο τιμών $f(A_1) = (-\infty, +\infty)$ που εμπεριέχει το μηδέν άρα υπάρχει ακριβώς ένα $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$.

Όμοια η f ορισμένη στο $(1\ ,\ +\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1 με σύνολο τιμών $f(A_2) = (-\infty, +\infty)$ που εμπεριέχει το μηδέν, άρα υπάρχει ακριβώς ένα $x_2 \in (1, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$

Δηλαδή η f(x) = 0 έχει ακριβώς δύο ρίζες πραγματικές στο πεδίο ορισμού της.

γ) Η εφαπτομένη της C_g της g(x) = lnx στο A(α , lnα) , α>0

είναι η $\boxed{y = \frac{1}{\alpha}x - 1 + \ln\alpha}$

Η εφαπτομένη της C_h της $h(x) = e^x$ στο $B(\beta\ ,\ e^\beta)$, $\beta \in \Re$

είναι η $\boxed{y = e^\beta x + e^\beta(1-\beta)}$

Από υπόθεση ταυτίζονται άρα ισχύουν

$$\begin{cases} \frac{1}{\alpha} = e^\beta \\ \ln\alpha - 1 = e^\beta(1-\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\frac{1}{\alpha} = \ln e^\beta \\ \ln\alpha - 1 = \frac{1}{\alpha} - \beta\frac{1}{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\ln\alpha \\ \ln\alpha - 1 = \frac{1}{\alpha} - \frac{\ln\alpha}{\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\ln\alpha \quad (1) \\ \alpha + 1 - \alpha\ln\alpha + \ln\alpha = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Θα δείξω ότι f(α) = 0 δηλ $\frac{\alpha+1}{\alpha-1} - \ln\alpha = 0 \Leftrightarrow$ | $(\alpha \neq 1, \alpha \in (0,1) \cup (1, +\infty))$

$\Leftrightarrow \alpha + 1 - \alpha\ln\alpha + \ln\alpha = 0$ που ισχύει λόγω (2)

δ) Οι εξισώσεις των εφαπτομένων στα A(α,lnα) και $B(\beta,\ e^\beta)$ στις C_f,C_g είναι

$y = \frac{1}{\alpha}x - 1 + \ln\alpha$, $y = e^\beta x - \beta \cdot e^\beta + e^\beta$

Για να υπάρχουν δύο κοινές εφαπτομένες πρέπει το σύστημα

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}=e^{\beta}\\[2ex] -1+\ln\alpha=-\beta e^{\beta}+e^{\beta}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}=e^{\beta}\\[2ex] -1+\ln\alpha=-\ln\alpha.\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-\ln\alpha\\[2ex] -1+\ln\alpha=-\ln\alpha.\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}=e^{\beta}\\[2ex] -1+\ln\alpha=\dfrac{1}{\alpha}(1-\ln\alpha)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}=e^{\beta} & (1)\\[2ex] \dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}-\ln\alpha=0 & (2)\end{cases}$$

Η εξίσωση (2) έχει ακριβώς δύο λύσεις (ερώτημα β)
Άρα το σύστημα έχει δύο ακριβώς λύσεις οπότε και οι ευθείες είναι δύο ακριβώς

ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ 1ο
Βατό μέσα από τη σχολική βιβλιογραφία.
ΘΕΜΑ 2ο
Βατό, παρόλο που δεν είδαμε τέτοιες ασκήσεις στη σχολική βιβλιογραφία. Συνδυαστική άσκηση.
ΘΕΜΑ 3ο
Όπως πάντα, πολλές πράξεις, χωρίς μαθηματική σκέψη.
ΘΕΜΑ 4ο
Οι μονάδες που δίνονται δεν αντιστοιχούν προς τη δυσκολία των ερωτημάτων, όπως για παράδειγμα το ερώτημα 4δ για το οποίο η συνθήκη f(α) = 0 που ζητείται στο 4γ είναι αναγκαία και όχι ικανή.

Γενικά, θέματα με πολλές πράξεις που απαιτούν από τους υποψήφιους ευχέρεια στους υπολογισμούς, καλό διάβασμα και καλή μελέτη συνδυαστικών ασκήσεων.

Δεν τα αξιολογούμε ως θέματα που ελέγχουν τη μαθηματική σκέψη και τις γνώσεις των μαθητών.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ:
Νίκος Δακουτρός,
Διαμαντής Νικολάου,
Τάκης Δρούτσας