ΠΕΜΠΤΗ 25 ΜΑΪΟΥ 2006

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ (ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

Α. Θεωρία. Σχολικό βιβλίο σελίδα 30.

Β$_\alpha$. Θεωρία. Σχολικό βιβλίο σελίδα 142.

Β$_\beta$. Θεωρία. Σχολικό βιβλίο σελίδα 16.

Γ.
α - Σ
β - Σ
γ - Λ
δ - Λ

Θέμα 2ο

α.

$$a + 4 + 5a + 8 + 4a + a - 1 + 2a = 50$$
$$13a = 39$$
$$a = 3$$

β.

x_i	ν_i	$x_i\nu_i$	N_i
0	7	7	7
1	23	23	30
2	12	24	42
3	2	6	44
4	6	24	50
Σύνολο	50	77	

$$\overline{x} = \frac{0 + 23 + 24 + 6 + 24}{50} = \frac{77}{50}.$$

γ. $\delta = \dfrac{x_{25} + x_{26}}{2} = \dfrac{1+1}{2} = 1$

δ. Έστω Α το ενδεχόμενο ένας μαθητής να έχει διαβάσει τουλάχιστον 3 βιβλία.

Τότε $P(A) = \dfrac{8}{50} = \dfrac{4}{25}$.

Θέμα 3ο

α. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος. Τότε N(Ω) = x + (x + 4)^2.
Αν Α το ενδεχόμενο να επιλεγεί αγόρι τότε Ν(Α) = x. Άρα η πιθανότητα να επιλεγεί αγόρι είναι $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{x}{x+(x+4)^2}$.

β. $P(A) = \dfrac{1}{19} \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+(x+4)^2} = \dfrac{1}{19} \Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x = 2 \quad ή \quad x = 8)$

- Αν x = 8 τότε N(Ω) = 8 + (8 + 4)^2= 152 > 100.

Άρα η τιμή x = 8 απορρίπτεται.

- Αν x = 2 τότε N(Ω) = 2 + (2 + 4)^2= 38 < 100.

Άρα η τιμή x = 2 είναι δεκτή.

Αν Κ είναι το ενδεχόμενο να επιλεγεί κορίτσι, τότε
N(K) = (2 + 4)^2 = 36, οπότε $P(K) = \dfrac{N(K)}{N(\Omega)} = \dfrac{36}{38} = \dfrac{18}{19}$

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x+(x+4)^2}, \quad x \geq 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της ως ρητή με:

$f'(x) = -\dfrac{x^2 - 16}{\left[x+(x+4)^2\right]^2}, \quad x \geq 0$.

Από τον επόμενο πίνακα μεταβολών

x	0		4		
f'		+	0	-	
f		↗		↘	

προκύπτει ότι η f έχει για x = 4 μέγιστη τιμή $f(4) = \dfrac{1}{17}$

Θέμα 4ο

α. Η συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + kx + 4\sqrt{x} + 10, \quad x \geq 0$ είναι παραγωγίσιμη για x > 0 με $f'(x) = -4x + k + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

Επειδή η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Α(1, f(1)) είναι παράλληλη στον x΄x προκύπτει $f'(1) = 0 \Leftrightarrow -4 + k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = 2$.

Για k = 2 είναι $f(x) = -2x^2 + 2x + 4\sqrt{x} + 10$
οπότε f(1) = 14 και το σημείο Α(1, f(1)) είναι το Α(1,14).
Αφού τώρα η εφαπτομένη της C_f στο Α είναι οριζόντια, η εξίσωσή της είναι y = 14.

β. $\bar{x} = f(1) = 14$

$f'(4) = -13$, άρα $s = -\dfrac{2(-13)}{13} = 2$

(i) Αφού η τυχαία μεταβλητή Χ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x} = 14$ και τυπική απόκλιση s = 2 έχουμε την ακόλουθη κατανομή:

Τιμές της Χ	8	10	12	14	16	18	20	
Ποσοστό	0,15%	2,35%	13,50%	34%	34%	13,50%	2,35%	0,15%

Αφού 3 παρατηρήσεις είναι μικρότερες ή ίσες του 8 είναι
$\dfrac{0{,}15}{100} \cdot \nu = 3 \Leftrightarrow \nu = 2000$
Στο διάστημα (10, 16) όπως προκύπτει από το προηγούμενο διάγραμμα βρίσκονται 81,5% του συνόλου ν = 2000 των παρατηρήσεων, δηλαδή
$\dfrac{81{,}5}{100} \cdot 2000 = 1630$ παρατηρήσεις.

(ii) Ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος είναι

$$\mathrm{cv} = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7} \approx 0{,}14 > 0{,}10$$
Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Αν προστεθεί ο α > 0 σε κάθε μία από τις προηγούμενες παρατηρήσεις, ο νέος συντελεστής μεταβλητής είναι $\dfrac{2}{14+\alpha}$.

Θέλουμε $\dfrac{2}{14+\alpha} \le 0{,}10 \Leftrightarrow 2 \le 1{,}4 + 0{,}1\alpha \Leftrightarrow 0{,}1\alpha \ge 0{,}6 \Leftrightarrow \alpha \ge 6$.

Έτσι η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει η παράμετρος α είναι **α = 6**.