ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ : 19/5/2010

ΘΕΜΑ Α

Α1) Θεώρημα στη σελίδα 304 του σχολικού βιβλίου.

Α2) Ορισμός στη σελίδα 279 του σχολικού βιβλίου.

Α3) Ορισμός στη σελίδα 273 του σχολικού βιβλίου.

Α4) α → Σ

β → Σ

γ → Λ

δ → Λ

ε → Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε: $z+\frac{2}{z}=2 \Leftrightarrow z^2-2z+2=0$. Άρα: $z_1=\frac{2-2i}{2}=1-i$, $z_2=\frac{2+2i}{2}=1+i$.

Β2. Έχουμε: $(1-i)^{2010}+(1+i)^{2010}=(1-i)^{2010}+[i(1-i)]^{2010}=$

$$=(1-i)^{2010}+i^{2010}\cdot(1-i)^{2010}=(1-i)^{2010}\cdot(1+i^{2010})=$$

$$=(1-i)^{2010}\cdot(1-1)=0\ .$$

Β3. Έχουμε: $|w-4+3i|=|z_1-z_2| \Leftrightarrow |w-4+3i|=|1-i-1-i| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |w-4+3i|=|-2i|=2$. Έστω ότι ο w είναι της μορφής: $w=x+yi$ τότε θα ισχύει:

$|x+yi-4+3i|=2 \Leftrightarrow |(x-4)+(y+3)i|=2 \Leftrightarrow (x-4)^2+(y+3)^2=4$. Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι ο κύκλος με κέντρο το $K(4,-3)$ και ακτίνα $\rho=2$.

Β4. Έχουμε: $|w|=|w+(-4+3i)-(-4+3i)|$ τώρα από *τριγονική ανισότητα* έχουμε:

$\big||w+(-4+3i)|-|-4+3i|\big|\leq|w+(-4+3i)-(-4+3i)|\leq|w+(-4+3i)|+|-4+3i| \Rightarrow \big||z_1-z_2|-|-4+3i|\big|\leq|w|\leq|z_1-z_2|+|-4+3i| \Rightarrow |2-5|\leq|w|\leq 2+5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\leq|w|\leq 7$.

ΘΕΜΑ Γ

Έχουμε $f(x) = 2x + \ln(x^2+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Η f είναι συνεχής ως πράξη συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο:

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{x^2+1}(x^2+1)' = 2 + \frac{2x}{x^2+1} = \frac{2x^2+2x+2}{x^2+1} = \frac{2(x^2+x+1)}{x^2+1}$$

Και επειδή $x^2+x+1>0$ και $x^2+1>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x)>0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Έχουμε: $2(x^2-3x+2) = ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(x^2-3x+2) = ln[(3x-2)^2+1] - ln(x^4+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2(3x-2) = ln[(3x-2)^2+1] - ln(x^4+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 + ln(x^4+1) = ln[(3x-2)^2+1] + 2(3x-2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 + ln(x^4+1) = 2(3x-2) + ln[(3x-2)^2+1]$. Παρατηρούμε ότι:

$2x^2 + ln(x^4+1) = 2(3x-2) + ln[(3x-2)^2+1] \Leftrightarrow f(x^2) = f(3x-2)$

Επειδή τώρα η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Π.Ο. της $\Rightarrow$ f θα είναι "$1-1$" και άρα:

$x^2 = 3x-2 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0$. Δηλαδή, $x=1$ ή $x=2$.

Γ3. Έχουμε: $f''(x) = \left(2+\frac{2x}{x^2+1}\right)' = 2\left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = 2\frac{x'(x^2+1)-x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = 2\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$

Για $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=1$, ενώ ισχύει ότι $f''(x)>0 \Leftrightarrow x \in (-1,1)$ και

$f''(x)<0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$.

Βλέπουμε ότι όντως η C_f έχει 2 σημεία καμπής στα σημεία $x_1=-1$ και $x_2=1$.

- Η εφαπτομένη της C_f στο $x_1=-1$ έχει εξίσωση:

  (ε_1): $y - f(-1) = f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y - (-2+ln2) = 1(x+1) \Leftrightarrow y = x + ln2$

- Η εφαπτομένη της C_f στο $x_2=1$ έχει εξίσωση:

  (ε_2): $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - (2+ln2) = 3(x-1) \Leftrightarrow y = 3x - 1 + ln2$

Παρατηρούμε ότι για $x=0$ οι (ε_1) και (ε_2) τέμνονται στο σημείο $M(0, ln2-1)$ του άξονα $y'y$.

Γ4. Έχουμε: $I = \int_{-1}^{1} xf(x)dx = \int_{-1}^{1}\left(2x^2 + xln(x^2+1)\right)dx =$

$$= 2\int_{-1}^{1} x^2 dx + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2+1)'ln(x^2+1)dx =$$

$$= 2\int_{-1}^{1} x^2 dx + \frac{1}{2}[(x^2+1)ln(x^2+1)]_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2+1)[ln(x^2+1)]'dx =$$

$$= 2\int_{-1}^{1} x^2 dx + \frac{1}{2}[(x^2+1)ln(x^2+1)]_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2+1)\frac{2x}{x^2+1}dx =$$

$$= 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{2}[x^2]_{-1}^{1} = 2\frac{2}{3} - \frac{1}{2}(1-1) = \frac{4}{3}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση $g(t) = \frac{t}{f(t)-t}$ είναι:

- ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$ αφού $f(t) \neq t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, και
- συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

Έτσι η συνάρτηση $f(x) = \int_0^x g(t)dt + x + 3$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με

$$f'(x) = g(x) + 1 = \frac{x}{f(x)-x} + 1 = \frac{x + f(x) - x}{f(x)-x} = \frac{f(x)}{f(x)-x} \quad , \qquad x \in \mathbb{R}$$

Δ2. Έχουμε: $g'(x) = \left[\left(f(x)\right)^2 - 2x\cdot f(x)\right] = 2f(x)\cdot f'(x) - 2f(x) - 2x\cdot f'(x) =$

$$= 2f'(x)(f(x)-x) - 2f(x) = 2\frac{f(x)}{f(x)-x}(f(x)-x) - 2f(x) = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}$$

Δ3. Έχουμε $f(0) = 0 + 3 + \int_0^0 \frac{t}{f(t)-t}dt = 3$

Λόγω του **Δ2** είναι $\left(f(x)\right)^2 - 2x \cdot f(x) = c,\ \ c \in \mathbb{R}$

Για $x = 0$ προκύπτει ότι $c = \left(f(0)\right)^2 - 2 \cdot 0 \cdot f(0) = 9$

Έτσι

$\left(f(x)\right)^2 - 2x \cdot f(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ \left(f(x)\right)^2 - 2x \cdot f(x) + x^2 = x^2 + 9 \ \Leftrightarrow\ (f(x) - x)^2 = x^2 + 9$

Αν τώρα, θέσουμε $h(x) = f(x) - x$ έχουμε ότι η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού $f(x) \neq x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα η h διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή $h(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $h(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Όμως $h(0) = f(0) - 0 = 3 > 0$ άρα $h(x) > 0$ και $f(x) > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$|f(x) - x| = \sqrt{x^2 + 9} \ \Leftrightarrow\ f(x) - x = \sqrt{x^2 + 9} \ \Leftrightarrow\ f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}\ ,\ \ x \in \mathbb{R}$

Δ4. Έστω $F(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt\ ,\ x \in \mathbb{R}$

Έχουμε: $F(x) = \int_c^{x+1} f(t)dt - \int_c^{x} f(t)dt\ ,\quad x, c \in \mathbb{R}$

και $F'(x) = f(x+1) - f(x),\ \ x \in \mathbb{R}$

Όμως $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}} > \frac{\sqrt{x^2}+x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{|x|+x}{\sqrt{x^2+9}} \geq 0\ ,\ \ x \in \mathbb{R}$

Δηλαδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Προκύπτει έτσι: $x < x + 1 \ \Rightarrow\ f(x) < f(x+1) \Rightarrow f(x+1) - f(x) > 0\ ,\ ,\ \ x \in \mathbb{R}$

Λόγω των παραπάνω και η F είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επομένως: $x < x + 1 \ \Leftrightarrow\ F(x) < F(x+1) \ \Leftrightarrow\ \int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt.$