ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ : 17/5/2010

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη στη σελ. 93α

A2. Ορισμός στη σελ. 87γ

A3. Ορισμοί στη σελ. 140

A4. α. $\rightarrow$ Σ

β. $\rightarrow$ Λ

γ. $\rightarrow$ Σ

δ. $\rightarrow$ Λ

ε. $\rightarrow$ Λ

ΘΕΜΑ Β

B1 Για $x \neq 1$ έχουμε :

$$\frac{f(x)-1}{x-1} = \frac{2\sqrt{x^2-x+1}-1-1}{x-1} = \frac{2(\sqrt{x^2-x+1}-1)}{x-1} =$$

$$= \frac{2x(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+1)} = \frac{2x}{\sqrt{x^2-x+1}+1} =$$

επομένως

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{2x}{\sqrt{x^2-x+1}+1} = 1$$

B2 Για κάθε x πραγματικό αριθμό έχουμε:

$$f'(x) \quad = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

επομένως $f'(0) = -1$

B3 Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον οριζόντιο άξονα έχουμε ότι εφω = - 1 δηλαδή ω = 135.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 Αρχικά η πρώτη κλάση είναι $[0, c)$ ενώ η δεύτερη κλάση είναι της μορφής $[c, 2c)$ άρα $\frac{c+2c}{2} = 6 \Leftrightarrow 3c = 12 \Leftrightarrow c = 4$

οπότε κλάσεις είναι $[0,4), [4,8)$, $[8,12)$, $[12,16)$, $[16,20)$ και τα κέντρα των κλάσεων είναι: $2, 6, 10, 14, 18$

Γ2

ΑΠΩΛΕΙΑ ΒΑΡΟΥΣ ΣΕ ΚΙΛΑ	ΚΕΝΤΡΟ ΚΛΑΣΗΣ x_i	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ v_i	$x_i v_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 v_i$
[0 – 4)	2	20	40	–8	64	1280
[4 – 8)	6	40	240	–4	16	640
[8 – 12)	10	45	450	0	0	0
[12 – 16)	14	30	420	4	16	480
[16 – 20)	18	25	450	8	64	1600
ΣΥΝΟΛΟ		160	1600			4000

Όπου:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} x_i v_i}{v} = \frac{1600}{160} = 10 \qquad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\kappa} (x_i - \bar{x})^2 v_i}{v} = \frac{4000}{160} = 25 \qquad s = \sqrt{s^2} = \sqrt{25} = 5$$

Γ3 Το δείγμα δεν είναι ομοιογενές αφού, $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = 0,5$ δηλαδή 50% (μεγαλύτερο του 10%)

Γ4 Κατά την ομαδοποίηση των παρατηρήσεων, θα πρέπει να θεωρούμε ότι τα στατιστικά δεδομένα κατανέμονται ομοιόμορφα σε κάθε κλάση. Έτσι από [4,6) έχουμε 20 παρατηρήσεις, και από [6,8) έχουμε άλλες 20 παρατηρήσεις, οπότε από [7,8) έχουμε 10 παρατηρήσεις, άρα συνολικά από 7 έως 14 κιλά έχουμε 10+45+ 30/2 =10+ 45 +15 =70 παρατηρήσεις

Επομένως η πιθανότητα είναι: 70/160 = 7/16 (από τον ορισμό της κλασσικής πιθανότητας, ευνοϊκές περιπτώσεις προς δυνατές περιπτώσεις)

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 $$f(x)=\ln(x-P(A))-\frac{1}{2}(x-P(A))^2+P(B),\ x>P(A)$$

$$f'(x)=\frac{1}{x-P(A)}(x-P(A))'-\frac{1}{2}2(x-P(A))(x-P(A))'\Leftrightarrow$$

$$f'(x)=\frac{1}{x-P(A)}-(x-P(A))\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1-[x-P(A)]^2}{x-P(A)},\ \ x>P(A)$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-[x-P(A)]^2}{x-P(A)}=0\Leftrightarrow 1-(x-P(A))^2=0\Leftrightarrow$$

$$(x-P(A))^2=1\overset{x>P(A)}{\Leftrightarrow}x-P(A)=1\Leftrightarrow x=1+P(A)$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{1-(x-P(A))^2}{x-P(A)}>0\overset{x>P(A)}{\Leftrightarrow}1-(x-P(A))^2>0$$

$$(x-P(A))^2<1\overset{x>P(A)}{\Leftrightarrow}x-P(A)<1\Leftrightarrow x<1+P(A)$$

x	P(A)	1+P(A)	+∞
f′	+	0	−
f	↗	Ολ. Μεγ.	↘

Άρα η f έχει ολικό μέγιστο στο σημείο χ = 1 + P(A), ενώ είναι γν. αύξουσα στο διάστημα ((P(A),1+P(A)) και γν. φθίνουσα στο (1+P(A), ∞).

Δ2 Επειδή η συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0=1+P(A)$ είναι

$1+P(A)=\frac{5}{3}\Leftrightarrow P(A)=\frac{2}{3}$ Και η τιμή του ακρότατου είναι :

$$f(1+P(A))=P(B)-\frac{1}{2},\ \text{άρα}\ P(B)-\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow P(B)=\frac{1}{2}$$

Δ3

Έχουμε,

$$P\left(\left(A\bigcap B\right)'\right)=1-P\left(A\bigcap B\right)=1-P\left(A\right)-P\left(B\right)+P\left(A\bigcup B\right)=1-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{5}{6}=\frac{2}{3}$$

Δ4

$$P\left((A-B)\bigcup(B-A)\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-2P\left(A\bigcap B\right)=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-2\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$$