ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη στη σελ. 152

Α2. Ορισμός στη σελ. 142

Α3. Ορισμοί στη σελ. 65

Α4. α) → Λ
β) → Λ
γ) → Σ
δ) → Λ
ε) → Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $P(M)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{N(M)}{N(\Omega)}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow N(\Omega)=4N(M)$

$64<N(\Omega)<72\Leftrightarrow 64<4N(M)<72\Leftrightarrow 16<N(M)<18$

και επειδή $N(M)\in\mathbb{N}$ είναι $N(M)=17$

Β2. $P(A)+P(K)+P(M)=1\Leftrightarrow$

$4\lambda^2-5\lambda+\frac{7}{4}+\frac{1}{4}=1\Leftrightarrow 4\lambda^2-5\lambda+1=0$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=25-16=9$

$\lambda_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{5\pm 3}{8}\begin{cases}\frac{8}{8}=1\\ \frac{2}{8}=\frac{1}{4}\end{cases}$

Για $\lambda=1$ είναι $P(K)=-5+\frac{7}{4}=-\frac{13}{4}<0$ απορ.

Για $\lambda=\frac{1}{4}$ είναι $P(A)=4\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}\in[0,1]$

$P(K)=-5\cdot\frac{1}{4}+\frac{7}{2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\in[0,1]$

Άρα $\lambda=\frac{1}{4}$

Β3. $P(A)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{N(A)}{68}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow N(A)=17$

$P(M)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{N(M)}{N(\Omega)}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow N(M)=17$

$P(K)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{N(M)}{N(\Omega)}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{N(M)}{68}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow N(M)=34$

Άρα υπάρχουν στο κουτί 17 άσπρες, 17 μαύρες και 34 κόκκινες σφαίρες.

Β4. Αφού $A\cap M=\varnothing$ ισχύει $P(A\cup M)=P(A)+P(M)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

ή

$A\cup M=K'$ οπότε $P(A\cup M)=P(K')=1-P(K)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Επειδή το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο προς τον οριζόντιο άξονα είναι $y_\Delta=y_E$ οπότε $f_3\%=f_4\%$.

$f_1\%+f_2\%+f_3\%+f_4\%+f_5\%=100$

$10+20+f_3\%+f_3\%+10=100$

$2f_3\%=60\Leftrightarrow f_3\%=30$ και $f_4\%=30$

Άρα $y_\Delta=y_E=30$

β' τρόπος

$\overline{x}=\sum_{i=1}^{5}x_if_i\Leftrightarrow 14,2=10\cdot 0,1+12\cdot 0,2+14\cdot f_3+16\cdot f_4+18\cdot 0,1\Leftrightarrow$

$14,2=14\cdot f_3+16\cdot f_4+5,2\Leftrightarrow 14f_3+16f_4=9$

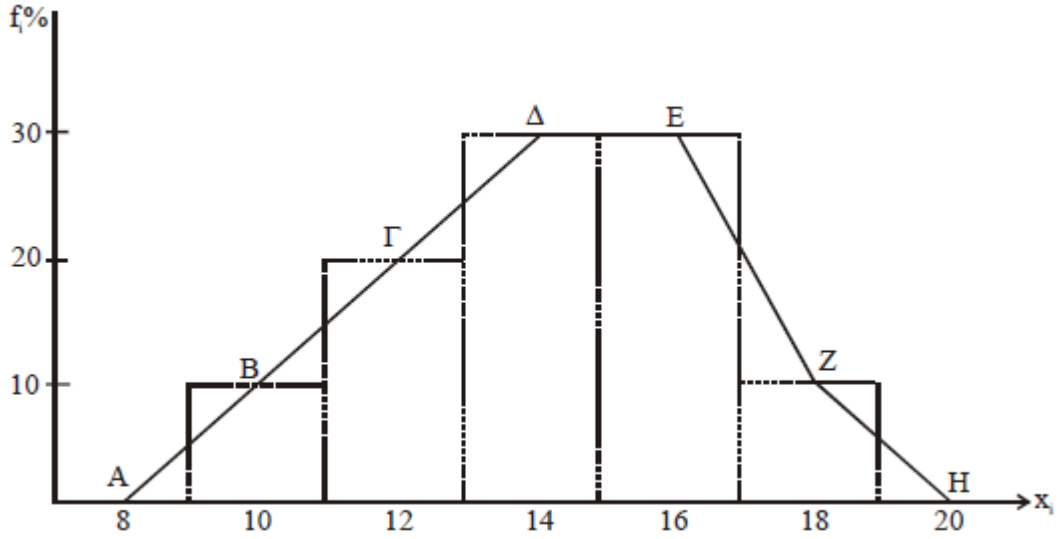
και

$f_1+f_2+f_3+f_4+f_5=1\Leftrightarrow 0,1+0,2+f_3+f_4+0,1=1\Leftrightarrow$

$f_3+f_4=0,6$

$\left.\begin{matrix}14f_3+16f_4=9\\ f_3+f_4=0,6\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{matrix}f_3=0,3\\ f_4=0,3\end{matrix}$ άρα $\begin{matrix}f_3\%=30\\ f_4\%=30\end{matrix}$

Γ2. Πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων



Γ3. $c = 10 - 8 = 2$ και $\frac{c}{2} = 1$ άρα οι κλάσεις είναι:

$[9, 11), [11, 13), [13, 15), [15, 17), [17, 19]$

κλάση	x_i	$f_i\%$
9 – 11	10	10
11 – 13	12	20
13 – 15	14	30
15 – 17	16	30
17 - 19	18	10
		100

Γ4. Το ποσοστό των πωλητών με πωλήσεις τουλάχιστον 15 χιλ. € είναι

$f_4\% + f_5\% = 30 + 10 = 40$

Άρα το 40% θα πάρει επιπλέον ποσό.

Γ5. Επειδή το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον άξονα x΄x είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος είναι $v = 80$

$f_i = \frac{v_i}{v} \Leftrightarrow v_i = f_i v \Leftrightarrow v_i = 0,4 \cdot 80 \Leftrightarrow v_i = 32$

Άρα 32 πωλητές δικαιούνται το εφάπαξ ποσό.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x)=e^{\frac{1}{3}x^3-\frac{11}{30}x^2+\frac{2}{15}x}$, $x\in R$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

$$f'(x)=e^{\frac{1}{3}x^3-\frac{11}{30}x^2+\frac{2}{15}x}\cdot\left(x^2-\frac{11}{15}x+\frac{2}{15}\right) \qquad x\in R$$

$e^{\frac{1}{3}x^3-\frac{11}{30}x^2+\frac{2}{15}x}>0$ για κάθε $x\in R$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-\frac{11}{15}x+\frac{2}{15}=0\Leftrightarrow 15x^2-11x+2=0$$

$$\Delta=(-11)^2-4\cdot 15\cdot 2=121-120=1>0$$

$$x_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{1}}{2\cdot 15}=\frac{11\pm 1}{30}\begin{cases}x_1=\frac{11-1}{30}=\frac{1}{3}\\ x_2=\frac{11+1}{30}=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}\end{cases}$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow x^2-\frac{11}{15}x+\frac{2}{15}>0\Leftrightarrow x<\frac{1}{3}\ \text{ ή }\ x>\frac{2}{5}$$

$$f'(x)<0\Leftrightarrow x^2-\frac{11}{15}x+\frac{2}{15}<0\Leftrightarrow \frac{1}{3}<x<\frac{2}{5}$$

x	$-\infty$		1/3		2/5		$+\infty$
f′(x)		+	0	−	0	+	
f		↗	T.M.	↘	T.ΕΛ.	↗	

$f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$, f συνεχής στο $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$ $\Rightarrow f\uparrow$ $\left|\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]\right.$

$f'(x)<0$ για κάθε $x\in\left(\frac{1}{3},\frac{2}{5}\right)$, f συνεχής στο $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{5}\right]$ $\Rightarrow f\downarrow$ $\left|\left[\frac{1}{3},\frac{2}{5}\right]\right.$

$f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(\frac{2}{5},+\infty\right)$, f συνεχής στο $\left[\frac{2}{5},+\infty\right)$ $\Rightarrow f\uparrow$ $\left|\left[\frac{2}{5},+\infty\right)\right.$

Δ2. Αφού $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ και επίσης ισχύουν $A \cap B = A$ και $A \cup B = B$

Αφού η f παρουσιάζει ακρότατα στο σημείο με τετμημένες $\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{5}$ και $\frac{1}{3} < \frac{2}{5}$ θα ισχύουν $P(A) = \frac{1}{3}$ και $P(B) = \frac{2}{5}$.

Άρα $P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{3}$ και $P(A \cup B) = P(B) = \frac{2}{5}$

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) = 0$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

Δ3. α) $f(x) = h(x) \Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} = e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right)}$

$\overset{e^x \text{ "1-1"}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow$

$$5x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right) = 3x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$x\left(5x^2 - \frac{11}{2}x + 2\right) - x\left(\frac{9x^2}{2} - 3x - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x\left(5x^2 - \frac{11}{10}x + 2 - \frac{9x^2}{2} + 3x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3\right) = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - 5x + 6\right) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \text{ή} \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ \text{ή} \\ x = 3 \end{cases} \end{cases}$$

β. Αφού $x_1 < x_2 < x_3$ οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, θα ισχύει: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$

Άρα $v_1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$, $v_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, $v_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

$$\overline{x} = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{3} v_i x_i = \frac{1}{13}\left(0 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7\right) = \frac{31}{13}$$