ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β΄

16 ΜΑΪΟΥ 2011

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία (θεώρ. Fermat) σχολικό βιβλίο, σελ. 260-261.

Α2. Θεωρία (ορισμός) σχολικό βιβλίο, σελ. 280.

Α3.

α	β	γ	δ	ε
Σ	Σ	Λ	Λ	Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε από υπόθεση ότι:

$|z-3i|+|\bar{z}+3i|=2$ (1)

Όμως $|\bar{z}+3i|=|\overline{\bar{z}+3i}|=|z-3i|$ (2)

Οπότε από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$|z-3i|+|z-3i|=2 \Leftrightarrow 2|z-3i|=2 \Leftrightarrow |z-3i|=1$ (3).

Αν $z = x + yi$ η (3) γράφεται: $|x+(y-3)i|=1 \Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=1$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z είναι κύκλος με κέντρο το σημείο Κ(0,3) και ακτίνα $\rho = 1$.

Β2. Από το ερώτημα Β1 έχουμε: $|z-3i|=1$

Οπότε $|z-3i|^2=1 \Leftrightarrow (z-3i)\cdot\overline{(z-3i)}=1 \Leftrightarrow (z-3i)\cdot\left(\bar{z}+3i\right)=1 \Leftrightarrow \bar{z}+3i=\dfrac{1}{z-3i}$.

Β3. Σύμφωνα με την προηγούμενη ισότητα ο w γράφεται

$$w=z-3i+\frac{1}{z-3i}=z-3i+\bar{z}+3i=z+\bar{z}=2\,\mathrm{Re}(z)\in R.$$

Όμως από τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των z έχουμε ότι: $x^2 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$.

Και επειδή $x = \mathrm{Re}(z)$ προκύπτει ότι: $-1 \le \mathrm{Re}(z) \le 1$.

Οπότε: $-2 \le 2\,\mathrm{Re}(z) \le 2$. Άρα $-2 \le w \le 2$.

Β4. Είναι: $|z-w|=\left|z-z+3i-\dfrac{1}{z-3i}\right|=\left|3i-\dfrac{1}{z-3i}\right|=|3i-\bar{z}-3i|=|-\bar{z}|=|z|$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η δοσμένη σχέση γράφεται:

$(e^x)' \cdot f'(x) + e^x \cdot f''(x) - (e^x)' = (x \cdot f'(x))' \Leftrightarrow$

$(e^x \cdot f'(x) - e^x)' = (x \cdot f'(x))' \Leftrightarrow e^x \cdot f'(x) - e^x = x \cdot f'(x) + c_1,\ c_1 \in R$

Για x = 0 προκύπτει:

$e^0 \cdot f'(0) - e^0 = 0 \cdot f'(0) + c_1$ και λόγω των δεδομένων αρχικών συνθηκών είναι

$c_1 = -1$.

Η τελευταία σχέση έτσι γράφεται:

$$e^x \cdot f'(x) - e^x = x \cdot f'(x) - 1 \Leftrightarrow f'(x)(e^x - x) = e^x - 1 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \left[\ln(e^x - x)\right]' \Leftrightarrow f(x) = \ln(e^x - x) + c_2.$$

Για x = 0 προκύπτει $c_2 = 0$.

Έτσι $f(x) = \ln(e^x - x)$.

(*) Αν θέσουμε $h(x) = e^x - x,\ x \in R$, είναι:

$h'(x) = e^x - 1,\ x \in R$.

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \overset{e^x\ 1-1}{\Leftrightarrow} x = 0.$

$h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow} x > 0.$

$h'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \overset{e^x\uparrow}{\Leftrightarrow} x < 0.$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
h′	−	0	+
h	↘	1	↗

Έτσι η h έχει ολικό ελάχιστο στη θέση x=0 την τιμή $h(0) = e^0 - 0 = 1$.

Δηλαδή $h(x) \geq 1 > 0$, για κάθε $x \in R$.

Γ2. Είναι $f'(x) = \left[\ln(e^x - x)\right]' = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$.

Λόγω της παρατήρησης (*) του ερωτήματος Γ1 οι ρίζες και το πρόσημο, συνεπώς ο πίνακας μεταβολών της f εξαρτάται μόνον από τις ρίζες και το πρόσημο του αριθμητού. $h'(x) = e^x - 1$.

Συνεπώς $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x>0$.

$f'(x)<0 \Leftrightarrow x<0$.

Άρα η f είναι: γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση x = 0 την τιμή $f(0)=\ln(e^0-0)=\ln 1=0$.

Γ3. Είναι: $f''(x)=\left(\dfrac{e^x-1}{e^x-x}\right)'=\dfrac{\left(e^x-1\right)'\left(e^x-x\right)-\left(e^x-1\right)\left(e^x-x\right)'}{\left(e^x-x\right)^2}=$

$$=\frac{e^x\left(e^x-x\right)-\left(e^x-1\right)\left(e^x-1\right)}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{e^x\left(e^x-x\right)-\left(e^x-1\right)^2}{\left(e^x-x\right)^2}=$$

$$=\frac{e^{2x}-xe^x-(e^{2x}-2e^x+1)}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{(2-x)e^x-1}{\left(e^x-x\right)^2}.$$

Θέτουμε $\varphi(x)=(2-x)e^x-1,\ x\in R$.

Είναι:

$\varphi'(x) = -e^x + (2-x)\cdot e^x = e^x(1-x)$

$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$

$\varphi'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
Φ		+	0	−	
Φ		↗	e − 1	↘	

Προκύπτει ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1, +\infty)$ και έχει ολικό μέγιστο $\varphi(1) = e - 1 > 0$.

Βρίσκουμε τώρα τα όρια της φ στα $-\infty$, $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[(2-x)\cdot e^x-1\right]=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(2-x)\cdot e^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-x}{e^{-x}}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{(2-x)'}{\left(e^{-x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{-e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{e^{-x}}=0$$

Έτσι $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=-1$.

Λόγω της συνέχειας και της μονοτονίας της φ είναι

$$\varphi\left((-\infty,1]\right)=\left(\lim_{x\to-\infty}\varphi(x),\varphi(1)\right]=\left(-1,e-1\right].$$

$$\varphi\left([1,+\infty)\right)=\left(\lim_{x\to+\infty}\varphi(x),\varphi(1)\right]=\left(-\infty,e-1\right].$$

Παρατηρούμε ότι:

- $0\in\varphi\left((-\infty,1]\right)$ άρα υπάρχει $x_1\in(-\infty,1]$ ώστε $\varphi(x_1)=0$.

  Εν τω μεταξύ η φ είναι γνησίως αύξουσα, άρα εκατέρωθεν του x_1 αλλάζει πρόσημο. Διότι με $x < x_1$ είναι $\varphi(x) < \varphi(x_1) \Leftrightarrow \varphi(x_1) < 0$

  Ενώ με $1 > x > x_1$ είναι $\varphi(x) > \varphi(x_1) \Leftrightarrow \varphi(x) > 0$.

  Έτσι ισοδύναμα (επειδή $(e^x-x)^2>0$ για κάθε $x\in R$) η f'' έχει μία μόνο ρίζα στο $(-\infty,1]$, εκατέρωθεν της οποίας αλλάζει πρόσημο.

- Όμοια τώρα $0\in\varphi\left([1,+\infty]\right)$ άρα υπάρχει $x_2\in[1,+\infty)$, ώστε $\varphi(x_2)=0$. Εν τω μεταξύ η φ είναι γνησίως φθίνουσα άρα εκατέρωθεν του x_2 αλλάζει πρόσημο.

  Διότι με $1 < x < x_2$ είναι $\varphi(x) > \varphi(x_2) \Leftrightarrow \varphi(x) > 0$

  Ενώ με $x > x_2$ είναι $\varphi(x) < \varphi(x_2) \Leftrightarrow \varphi(x) < 0$.

  Έτσι η f'' έχει επίσης μία μόνο ρίζα x_2 στο $[1,+\infty)$, εκατέρωθεν της οποίας αλλάζει πρόσημο. Άρα τελικά, η f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής στις θέσεις x_1, x_2.

Γ4. Θέτουμε $g(x)=\ln(e^x-x)-\text{συν}\,x=f(x)-\text{συν}\,x,\ x\in R.$

- Ύπαρξη: Η g είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών στο R, άρα και στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

  Είναι $g(0)=f(0)-\text{συν}(0)=-1<0$

  $$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\text{συν}\frac{\pi}{2}=f\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

  Όμως $f\uparrow$ στο $[0,+\infty)$, άρα είναι $\frac{\pi}{2}>0\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)>f(0)\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0.$

  Έτσι $g(0)\cdot g\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$, οπότε λόγω του Θ. Bolzano η g έχει μία ρίζα στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

- Μοναδικότητα:

  Θα δείξουμε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, οπότε η ρίζα θα είναι μοναδική.

  Έστω $x_1, x_2 \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με $x_1 < x_2$ τότε

  $f(x_1) < f(x_2)$ διότι $f \uparrow$ στο $[0,+\infty)$

  $\text{συν}\, x_1 > \text{συν}\, x_2$ διότι $\text{συν}\, x \downarrow$ στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

  Άρα $-\text{συν}\, x_1 < -\text{συν}\, x_2$.

  Έτσι όμως $f(x_2) - \text{συν}\, x_1 < f(x_2) - \text{συν}\, x_2$, άρα $g(x_1) < g(x_2)$.

  Άρα g γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

<u>Παρατήρηση (2ος τρόπος για τη μονοτονία):</u>

Η μονοτονία της g στο [0, π/2] μπορεί να προκύψει και ως εξής:

g΄(x) = f΄(x) + ημ x. Όμως f΄(x) > 0, για κάθε x ∈ (0, +∞) άρα και για κάθε x ∈ (0, π/2), ενώ επίσης ημ x > 0 για κάθε x ∈ (0, π/2).

Άρα g΄(x) > 0 για κάθε x ∈ (0, π/2) και επομένως g γνησίως αύξουσα στο [0, π/2].

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε ότι:

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)}\,\text{dt}$$

Θέτουμε: x + t = u ⇔ t = u – x. Οπότε: dt = du.

Ακόμη για t = 0 έχουμε u = x και για t = – x έχουμε u = 0.

Επομένως:

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_x^0 \frac{e^{2u-2x}}{g(u)}\,\text{du} = \int_x^0 e^{-2x}\frac{e^{2u}}{g(u)}\,\text{du} = e^{-2x}\int_x^0 \frac{e^{2u}}{g(u)}\,\text{du} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-f(x) = -e^{2x}e^{-2x}\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}\,\text{du} \Leftrightarrow 1-f(x) = -\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}\,\text{du}$$

Άρα $f(x)=1+\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}\,\mathrm{du}$ (1)

Με ανάλογο τρόπο προκύπτει ότι:

$$g(x)=1+\int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)}\,\mathrm{du} \quad (2)$$

Επειδή οι συναρτήσεις $\frac{e^{2u}}{g(u)}$ και $\frac{e^{2u}}{f(u)}$ είναι συνεχείς στο [0, x] με x $\in$ R συμπεραίνουμε ότι οι συναρτήσεις $\int_0^x \frac{e^{2u}}{g(u)}\,\mathrm{du}$ και $\int_0^x \frac{e^{2u}}{f(u)}\,\mathrm{du}$ είναι παραγωγίσιμες στο R, επομένως και οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο R.

$$f'(x)=\frac{e^{2x}}{g(x)} \quad \text{και} \quad g'(x)=\frac{e^{2x}}{f(x)}$$

οπότε $f'(x)g(x)=e^{2x}$ και $g'(x)f(x)=e^{2x}$

άρα

$$f'(x)g(x)=g'(x)f(x) \Leftrightarrow f'(x)g(x)-g'(x)f(x)=0 \overset{g(x)>0}{\Rightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=0.$$

Από την τελευταία προκύπτει ότι: $\frac{f(x)}{g(x)}=c$

και επειδή $f(0)=g(0) \overset{(1)\&(2)}{=} 1$, θα είναι c = 1.

Άρα $f(x)=g(x)$.

Δ2. Επειδή είναι:

$f'(x)=\frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow$ (Ερώτημα Δ1)

$$f'(x)f(x)=e^{2x} \Leftrightarrow 2f'(x)f(x)=2e^{2x} \Leftrightarrow \left(f^2(x)\right)'=\left(e^{2x}\right)'$$

Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα (συνέπεια του Θ.Μ.Τ.) έχουμε:

$f^2(x)=e^{2x}+c$

Όμως $f(0)=1$, οπότε $c=0$.

Άρα $f^2(x)=e^{2x} \Leftrightarrow \left[f(x)\right]^2=\left[e^x\right]^2 \Leftrightarrow |f(x)|=e^x$

Και επειδή $f(x)>0$, προκύπτει ότι $f(x)=e^x$.

Δ3. Είναι

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to 0^-}\left(x\cdot e^{-\frac{1}{x}}\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{+\infty}{-\infty}}{=}(De\,L'Hospital)\ (*)$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{\frac{-1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}=-\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{-1}{x}}=-\infty.$$

(*): Θέτουμε $\frac{1}{x}=y$ οπότε το $\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to -\infty}\frac{e^{-y}}{y}:\frac{+\infty}{-\infty}$.

Δ4. Είναι $F'(x)=f(x^2)>0$. Άρα η $F\uparrow$ στο $[0,1]$.
Άρα για $0\le x\le 1$ θα είναι $F(x)\le F(1)$ και επειδή $F(1)=0$, προκύπτει ότι $F(x)\le 0$ $\forall x\in[0,1]$.
Επομένως $\forall x\in[0,1]$, θα είναι:

$$E=-\int_0^1 F(x)dx=-\int_0^1 x'F(x)dx=-\left[xF(x)\right]_0^1+\int_0^1 xF'(x)dx=$$

$$=-F(1)+\int_0^1 x\left(\int_1^x f(t^2)\right)'\mathrm{dx}=\int_0^1 xf(x^2)\mathrm{dx}=$$

$$=\int_0^1 xe^{x^2}\mathrm{dx}=\frac{1}{2}\int_0^1 2xe^{x^2}\mathrm{dx}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(e^{x^2}\right)'\mathrm{dx}=\frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}(e-1)\ \text{τ.μ.}$$