Γιώργος Καριπίδης, Μαθηματικός

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2013

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σε 334
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 246
Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 222

Α4.
α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Σωστό
δ) Λάθος
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $(z-2)(\overline{z}-2)+|z-2|=2 \Leftrightarrow |z-2|^2+|z-2|=2 \Leftrightarrow |z-2|^2+|z-2|-2=0$
Οπότε $|z-2|=1$ ή $|z-2|=-2$ (αδύνατη)
Άρα ο γεωμετρικό τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο Κ(2,0) και ακτίνα ρ = 1.
Έχουμε $|z|=|(z-2)+2|\le |z-2|+2=3$, οπότε $|z|\le 3$

Β2. Έστω $z_1=\kappa+\lambda i$ και $z_2=\kappa-\lambda i$ με $\kappa,\lambda\in R,\lambda>0$.
Έχουμε $|\mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)|=2 \Leftrightarrow |2\lambda|=2 \Leftrightarrow \lambda=1$ άρα $z_1=\kappa+i$ και $z_2=\kappa-i$
Έχουμε $|z_1-2|=1 \Leftrightarrow |(\kappa-2)+i|=1 \Leftrightarrow \sqrt{(\kappa-2)^2+1}=1 \Leftrightarrow \kappa=2$
Άρα $z_1=2+i$ και $z_2=2-i$.
Είναι $z_1+z_2=-\beta \Leftrightarrow \beta=-4$ και $z_1z_2=\gamma \Leftrightarrow \gamma=5$

Β3. Αφού οι μιγαδικοί αριθμοί α_0, α_1, α_2 ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος Β1, τότε θα είναι:
$|\alpha_0|\le|\alpha_1|\le 3$ και $|\alpha_2|\le 3$.
Έχουμε $\nu^3+\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0=0 \Leftrightarrow \nu^3=-\left(\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0\right)$
Άρα $|\nu^3|=\left|-\left(\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0\right)\right| \Leftrightarrow$

$|v|^3 = |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| \le |\alpha_2 v^2| + |\alpha_1 v| + |\alpha_0| \le 3|v|^2 + 3|v| + 3.$

Επομένως $|v|^3 - 3\left(|v|^2 + |v| + 1\right) \le 0 < 1.$

Άρα $|v|^3 - 1 - 3\left(|v|^2 + |v| + 1\right) < 0 \Leftrightarrow$

$\left(|v| - 1\right)\left(|v|^2 + |v| + 1\right) - 3\left(|v|^2 + |v| + 1\right) < 0 \Leftrightarrow$

$\left(|v| - 4\right)\left(|v|^2 + |v| + 1\right) < 0$ και αφού $|v|^2 + |v| + 1 > 0$

Θα είναι $|v| - 4 < 0$ δηλαδή $|v| < 4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x \in R$ έχουμε $2\left(f(x) + x\right) \cdot \left(f'(x) + 1\right) = 2x \Leftrightarrow$

$\left[\left(f(x) + x\right)^2\right]' = \left(x^2\right)'$

Άρα υπάρχει $c \in R$, ώστε $\left(f(x) + x\right)^2 = x^2 + c,\ x \in R$

Για x = 0 έχουμε c = 1

Επομένως $\left(f(x) + x\right)^2 = x^2 + 1, x \in R$ (1)

Θέτουμε $\varphi(x) = f(x) + x, x \in R$

Οπότε η σχέση (1) γράφεται $\varphi^2(x) = x^2 + 1, x \in R$

Η φ είναι συνεχής στο R με $\varphi(x) \ne 0, x \in R$

Οπότε η φ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R και αφού φ(0) = f(0) = 1 , τότε φ(x) > 0 , $x \in R$

Άρα

$\varphi(x) = \sqrt{x^2 + 1}, x \in R \Leftrightarrow f(x) + x = \sqrt{x^2 + 1}, x \in R \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, x \in R$

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με

$f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \dfrac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0, x \in R$, αφού

Για κάθε $x \in R$ ισχύει $\sqrt{x^2 + 1} - x > \sqrt{x^2} - x = |x| - x \ge 0$

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R και άρα η f '1-1'.

Για κάθε $x \in R$ έχουμε

$f\left(g(x)\right) = 1 \Leftrightarrow f\left(g(x)\right) = f(0) \overset{f\ '1-1'}{\Leftrightarrow} g(x) = 0$

Έχουμε $g'(x)=3x^2+3x=3x(x+1)$, $x\in R$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
g΄	+	-	+	
g	Γνησίως αύξουσα	Γνησίως φθίνουσα	Γνησίως αύξουσα	

Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$.

- Στο $A_1=(-\infty,-1]$ η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε $g(A_1)=(-\infty,-\frac{1}{2}]$ και αφού $0\notin g(A_1)$, τότε η εξίσωση g(x) = 0 δεν έχει καμία ρίζα στο A_1
- Στο $A_2=[-1,0]$ η g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε $g(A_2)=[-1,-\frac{1}{2}]$ και αφού $0\notin g(A_2)$, τότε η εξίσωση g(x) = 0 δεν έχει καμία ρίζα στο A_2
- Στο $A_3=[0,+\infty)$ οπότε η g είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε $g(A_3)=[-1,+\infty)$ και αφού $0\in g(A_3)$, τότε η εξίσωση g(x) = 0 ακριβώς μία ρίζα στο A_3

Άρα η εξίσωση f(g(x)) = 1 έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

Γ3. Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x)=\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt\cdot\eta\mu x$, $x\in[0,\frac{\pi}{4}]$

Η f είναι συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{4}]$, οπότε η συνάρτηση $\int_0^x f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\frac{\pi}{4}]$.

Η συνάρτηση $\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,\frac{\pi}{4}]$ (άρα και συνεχής) , ως σύνθεση των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $\int_0^x f(t)dt$ και $x-\frac{\pi}{4}$.

- Η h είναι συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{4}]$ ως γινόμενο των συνεχών συναρτήσεων $\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt$ και ημx.

- Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\frac{\pi}{4})$ ως γινόμενο των παραγωγίσιμων συναρτήσεων $\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt$ και ημx με
  $h'(x)=\sigma\upsilon\nu x\int_0^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)dt+\eta\mu x\cdot f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$
- h(0) = $h\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle

υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,\frac{\pi}{4})$ τέτοιο, ώστε:

$$h'(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0-\frac{\pi}{4})\eta\mu x_0+\sigma\upsilon\nu x_0\int_0^{x_0-\frac{\pi}{4}} f(t)dt=0\Leftrightarrow$$

$$\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt=f\left(x_0-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x_0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{f(1+5h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}=$

$$=\lim_{h\to0}\left(\frac{f(1+5h)-f(1)}{h}+\frac{f(1)-f(1-h)}{h}\right)$$

$$=\lim_{h\to0}\left(5\frac{f(1+5h)-f(1)}{5h}+\frac{f(1)-f(1-h)}{h}\right)=$$

$$=\lim_{h\to0}\left(5\frac{f(1+5h)-f(1)}{5h}+\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\right)=$$

$$=5\cdot f'(1)+f'(1)=0$$

Άρα 6f΄(1)=0, οπότε f΄(1)=0

Ισχύει ότι: $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(1+5h)-f(1)}{5h}\right)^{u=5h}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{u}=f'(1)$ και

$=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(1-h)-f(1)}{-h}\right)^{u=-h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+u)-f(1)}{u}=f'(1)$

Η f΄ είναι γνησίως αύξουσα $(0,+\infty)$ άρα

Για x < 1 έχουμε f΄(x) < f΄(1) = 0

Για x > 1 έχουμε f΄(x) > f΄(1) = 0

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 1.

Δ2. Η συνάρτηση $\dfrac{f(t)-1}{t-1}$ είναι συνεχής στο $(1,+\infty)$, οπότε η

η g είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με $g'(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}>0$

αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και x > 1.

Άρα η g γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x)=\int\limits_{x}^{x+1}g(u)du, x>1$

Η Κ(x) γράφεται $K(x)=-\int\limits_{2}^{x}g(u)du+\int\limits_{2}^{x+1}g(u)du, x>1$.

Η Κ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με

$K'(x)=g(x+1)-g(x)>0, x\in(1,+\infty)$, αφού x + 1 > x και g γνησίως αύξουσα.

Οπότε η Κ είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

Η ανίσωση γίνεται

$K(8x^2+5)>K\left(2x^4+5\right)\underset{\substack{8x^2+5>1\\2x^4+5>1}}{\overset{\text{Κγν.αύξουσα}}{\Leftrightarrow}}8x^2+5>2x^4+5\Leftrightarrow x^2\left(4-x^2\right)>0\Leftrightarrow$

$x\in(-2,0)\cup(0,2)$

Δ3. Η g΄ είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με

$$g''(x)=\frac{f'(x)(x-1)-\left(f(x)-1\right)}{(x-1)^2}=\frac{f'(x)(x-1)-\left(f(x)-f(1)\right)}{(x-1)^2}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f στο [1,x] , οπότε υπάρχει $\xi\in(1,x)$ τέτοιο ώστε $g'(x)<g'(a)\Leftrightarrow h'(x)<0$.

Άρα $g''(x)=\dfrac{f'(x)(x-1)-f'(\xi)(x-1)}{(x-1)^2}=\dfrac{f'(x)-f'(\xi)}{x-1}$

Έχουμε 1 < ξ < x και η f΄ γνησίως αύξουσα οπότε $f'(\xi)<f'(x)$.

Οπότε $g''(x)>0$, $x\in(1,+\infty)$ και άρα η g κυρτή στο $(1,+\infty)$.

Η σχέση που μας δίνεται γράφεται: g(x) = g΄(α) (x – α),x > 1

Θεωρούμε την συνάρτηση h(x) = g(x) – g΄(α)(x – α), x > 1.

Είναι h(α) = 0.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(1,+\infty)$ με h΄(x) =g΄(x) – g΄(α)

Έχουμε $h'(x)=0\Leftrightarrow g'(x)=g'(a)\overset{g'1-1}{\Leftrightarrow}x=a$

Για x < α είναι $g'(x)<g'(a)\Leftrightarrow h'(x)<0$

Για x > α είναι $g'(x)>g'(a)\Leftrightarrow h'(x)>0$

Η h έχει ελάχιστο στο α με h(α) = 0. Οπότε το α μοναδική ρίζα της εξίσωση h(x) = 0.