ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 28

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 14

Α3. Σχολικό βιβλίο 87

Α4.

α) Λ

β) Σ

γ) Λ

δ) Λ

ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$P(\omega_1)=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2-1}{x^2(x+1)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=$$

$$-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{1}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}=\frac{1}{4}$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}\ln x+\frac{1}{3},x>0$$

Έχουμε $P(\omega_3)=f'(1)=\frac{1}{3}\ln 1+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

Β2. Είναι $A'=\{\omega_2,\omega_3\}$

- Επειδή $\{\omega_3'\}\subseteq A$,τότε $P(\omega_3)\le P(A')$,δηλαδή $\frac{1}{3}\le P(A')$

- Επειδή $A'\subseteq\Gamma=\{\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$, τότε

  $$P(A')\le P(\Gamma)=P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4)=1-P(\omega_1)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

  Άρα $\frac{1}{3}\le P(A')\le\frac{3}{4}$

Β3. Έχουμε $P(A')=\frac{3}{4}\Leftrightarrow P(\omega_2)+P(\omega_3)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow P(\omega_2)=\frac{3}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$

$$P(\omega_4)=1-\left[P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)\right]=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{12}+\frac{1}{3}\right)=0$$

$A-B=\{\omega_4\},B-A=\{\omega_3\}$, οπότε $(A-B)\cup(B-A)=\{\omega_3,\omega_4\}$ και

$A'-B'=A'\cap(B')'=B\cap A'=B-A=\{\omega_3\}$

Άρα $P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]=P(\omega_3)+P(\omega_4)=\frac{1}{3}$ και $P(A'-B')=P(\omega_3)=\frac{1}{3}$

ΘΕΜΑ Γ

Αν c το πλάτος κάθε κλάσης τότε οι κλάσεις είναι:
[50,50+c) , [50+c,50+2c), [50+2c,50+3c), [50+3c,50+4c)

Έχουμε $x_4 = 85 \Leftrightarrow \frac{50+3c+50+4c}{2} = 85 \Leftrightarrow c = 10$

Γ2. Επειδή σε κάθε κλάση οι τιμές κατανέμονται ομοιόμορφα με $\delta = x_3 = 75$ και η διάμεσος έχει αθροιστική σχετική συχνότητα 50%, τότε:

$\frac{f_3}{2} + f_4 = 0,5 \Leftrightarrow \frac{f_3}{2} + 2f_3 = 0,5 \Leftrightarrow f_3 = 0,2$

Επομένως $f_4 = 2f_3 = 0,4$.

Έχουμε $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1 \Leftrightarrow f_1 + f_2 + 0,2 + 0,4 = 1 \Leftrightarrow f_1 + f_2 = 0,4 \Leftrightarrow f_2 = 0,4 - f_1$

$\overline{x} = 74 \Leftrightarrow x_1f_1 + x_2f_2 + x_3f_3 + x_4f_4 = 74 \Leftrightarrow$

$55f_1 + 65(0,4 - f_1) + 75 \cdot 0,2 + 85 \cdot 0,4 = 74 \Leftrightarrow f_1 = 0,1$, άρα $f_2 = 0,4 - 0,1 = 0,3$

Κλάσεις	**Κεντρικές τιμές** x_i	**Σχετική Συχνότητα** f_i
[50,60)	**55**	**0,1**
[60.70)	**65**	**0,3**
[70.80)	**75**	**0,2**
[80.90)	**85**	**0,4**
Σύνολο	**-**	**1,0**

Γ3. Αν ν το πλήθος των παρατηρήσεων τότε οι παρατηρήσεις που είναι μικρότερες του 80 έχουν πλήθος:

$v_1 + v_2 + v_3 = f_1v + f_2v + f_3v = 0,6v$

Η μέση τιμή των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του 80 είναι:

$$\frac{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3}{v_1 + v_2 + v_3} = \frac{x_1f_1v + x_2f_2v + x_3f_3v}{0,6v} = \frac{55 \cdot 0,1 + 65 \cdot 0,3 + 75 \cdot 0,2}{0,6} = \frac{200}{3}$$

Γ4. Αν $\overline{y}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων τότε:

Αφού το 2,5 % των παρατηρήσεων είναι τουλάχιστον 74, έχουμε $\overline{y} + 2s = 74$ και επειδή το 16% των παρατηρήσεων είναι το πολύ 68, έχουμε $\overline{y} - s = 68$.

Άρα s = 2 και $\overline{y} = 70$.

Επειδή $CV = \frac{s}{\overline{y}} = \frac{2}{70} = \frac{1}{35} < \frac{1}{10} = 10\%$, το δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x)=\ln x+1$,x>0

Οπότε f(1) = κ και f′(1) = 1

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο (1,f(1)) είναι y – κ = f′(1) (x – 1) , οπότε y = x + κ – 1

Τα σημεία που τέμνει του άξονες είναι Α(0,κ – 1) και Β(1 – κ , 0).

Το εμβαδόν είναι $E=\frac{1}{2}(OA)(OB)=\frac{1}{2}|1-\kappa||\kappa-1|=\frac{1}{2}(\kappa-1)^2$, αφού κ > 1

E < 2 $\Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}(\kappa-1)^2<2\Leftrightarrow$

$\kappa^2-2\kappa-3<0\Leftrightarrow$

$-1<\kappa<3$ και αφού κ ακέραιος με κ > 1 ,τότε κ = 2.

Δ2.

α) y = x + 1

x = y – 1

Από εφαρμογή σχολικού $\overline{x}=\overline{y}-1=30$

β) Οι νέες τετμημένες είναι:

$x_1+3,x_2+3,x_3+3,...,x_{20}+3,x_{21},x_{22},...,x_{35},x_{36}-\lambda,...,x_{50}-\lambda$

Επομένως η μέση τιμή τους είναι

$$\overline{x}'=\frac{x_1+x_2+...+x_{50}+60-15\lambda}{50}=\frac{x_1+x_2+...+x_{50}}{50}+\frac{60-15\lambda}{50}=\overline{x}+\frac{60-15\lambda}{50}$$

$$=30+\frac{60-15\lambda}{50}$$

Έχουμε $\overline{x}'=31\Leftrightarrow 30+\frac{60-15\lambda}{50}=31\Leftrightarrow\lambda=\frac{2}{3}$

Δ3. Έχουμε f(e) = e + 2 και $f'\left(\frac{1}{e}\right)=0$.

$f'(x)=\ln x+1$, x > 0

Το πρόσημο της f′ και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0 $\quad \frac{1}{e} \quad +\infty$	
f΄(x)	-	+
f(x)	Γνησίως φθίνουσα	Γνησίως αύξουσα

Αφού $\frac{1}{e}<\alpha<\beta<\gamma<e$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$, τότε

$$f\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)\Leftrightarrow f'\left(\frac{1}{e}\right)=0<2-\frac{1}{e}<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$$

Έχουμε $\alpha^\alpha\cdot\beta^\beta\cdot\gamma^\gamma=e^7\Leftrightarrow\ln\left(\alpha^\alpha\cdot\beta^\beta\cdot\gamma^\gamma\right)=\ln e^7\Leftrightarrow\ln\alpha^\alpha+\ln\beta^\beta+\ln\gamma^\gamma=7\Leftrightarrow$

$\alpha\ln\alpha+\beta\ln\beta+\gamma\ln\gamma=7$

Επομένως το εύρος είναι $R=f(e)-f'\left(\frac{1}{e}\right)=e+2-0=e+2$

και η μέση τιμή τους είναι: $\frac{\alpha\ln\alpha+2+\beta\ln\beta+2+\gamma\ln\gamma+2+e+0}{5}=\frac{15+e}{5}$

Δ4.

α) $f'(t)>0\Leftrightarrow\ln t+1>0\Leftrightarrow t>\frac{1}{e}$ και αφού $t\in\Omega$ τότε:

$A=\{t_{11},t_{12},...,t_{30}\}$ και $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{20}{30}=\frac{2}{3}$

β) Επίσης $t\ln t+2>\ln t+1+1\Leftrightarrow(t-1)\ln t>0\overset{t\in\Omega}{\Leftrightarrow}t<1$ οπότε $B=\{t_{11},...,t_{29}\}$.

Έχουμε $A\cap B=\{t_{11},t_{12},...,t_{29}\}$ και $P(A\cap B)=\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\frac{19}{30}$