**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 20 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

Α1. Για δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα  ενός δειγματικού χώρου  , να αποδείξετε ότι  Μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση  με πεδίο ορισμού . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση 

παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο ; Μονάδες 4

Α3. Τι ονομάζεται (απόλυτη) συχνότητατης τιμής  μιας μεταβλητής; Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα , όπου  η μέση τιμή και  η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων. (μονάδες 2)

β) Σε ομαδοποιημένα δεδομένα το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι πάντοτε ίσο με ένα. (μονάδες 2)

γ) Έστω μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο σημείο . Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  στο σημείο της  είναι .

(μονάδες 2)

δ) Το ενδεχόμενο  πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το αλλά όχι το .

(μονάδες 2)

ε) Ο σταθμισμένος αριθμητικός μέσος ή σταθμικός μέσος είναι ένα μέτρο διασποράς.

(μονάδες 2)

Μονάδες 10 **ΘΕΜΑ Β**

Η βαθμολογία εξήντα μαθητών ενός Λυκείου σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών βρίσκεται

στο διάστημα  και έχει ομαδοποιηθεί σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους. Γνωρίζουμε,

επίσης, ότι έξι μαθητές έχουν πάρει βαθμό μικρότερο από , δεκαοκτώ μαθητές μικρότερο

από , έξι μαθητές μεγαλύτερο ή ίσο του και δεκαοκτώ μαθητές μεγαλύτερο ή ίσο του .

Β1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων κατάλληλα

συμπληρωμένο, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Κλάσεις | Κεντρικές τιμές | Συχνότητα | Σχετική Συχνότητα | Αθροιστική Συχνότητα | Αθροιστική σχετική Συχνότητα |
| [10 , ) |  |  |  |  |  |
| [ , ) |  |  |  |  |  |
| [ , ) |  |  |  |  |  |
| [ , ) |  |  |  |  |  |
| [ , 20 ) |  |  |  |  |  |
| Σύνολο |  |  |  |  |  |

Μονάδες 12

Β2. Να βρείτε τη μέση βαθμολογία των μαθητών και τη διάμεσο  των βαθμολογιών τους.

Μονάδες 8

Β3. Στο των μαθητών με την καλύτερη επίδοση πρόκειται να δοθεί έπαινος. Από ποιον βαθμό και πάνω πρέπει να έχει γράψει κάποιος μαθητής για να πάρει έπαινο;

(Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες). Μονάδες 5

**ΘΕΜΑ Γ**

Έστω  ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του  δίνονται από τη σχέση  ,  , με .

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα  του  με

 και .

Γ1. Να αποδείξετε ότι και να βρείτε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του .

Μονάδες 8

Γ2. Να αποδείξετε ότι  ,  και να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

 : «να πραγματοποιείται το  και όχι το »

 : «να μην πραγματοποιείται το  ή να μην πραγματοποιείται το ». Μονάδες 10

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση  ,  ,  και το ενδεχόμενο

 = {  η συνάρτηση  να είναι γνησίως αύξουσα }.

Να εξετάσετε αν το ενδεχόμενο  είναι βέβαιο. Μονάδες 7

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα  με μήκος . Θεωρούμε εσωτερικό σημείο  του  τέτοιο, ώστε το μήκος του τμήματος  να είναι .

Δ1. Κατασκευάζουμε τα τετράγωνα  και , όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

i) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων, ως συνάρτηση του , είναι  , . (μονάδες 3)

ii) Να βρείτε για ποια τιμή του  το εμβαδόν  γίνεται ελάχιστο. (μονάδες 5)

Μονάδες 8

Στη συνέχεια, για , χωρίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα  σε  διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα  ,  με αντίστοιχα μήκη  , .

Αν η μέση τιμή των μηκών  , είναι  και η τυπική τους απόκλιση είναι τότε:

Δ2. Να δείξετε ότι . Μονάδες 5

Δ3. Να βρείτε τη μέση τιμή των εμβαδών των τετραγώνων που κατασκευάζονται με

πλευρές τα διαδοχικά τμήματα  με αντίστοιχα μήκη  , όπου .

Δίνεται ότι:  Μονάδες 6

Δ4. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα  , .

Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου

 { , τέτοιο, ώστε ο δείκτης  να είναι πολλαπλάσιο του  ή πολλαπλάσιο του }. Μονάδες 6

**ΛΥΣΕΙΣ**

**Θέμα Α**

Α1. Απόδειξη, σχολικό βιβλίο, σελ. 151  
Α2. Ορισμός, σχολικό βιβλίο, σελ. 14  
Α3. Ορισμός, σχολικό βιβλίο, σελ. 65  
  
Α4. α) Λ β) Λ  γ) Σ δ) Σ ε) Λ

**Θέμα Β**

Β1. Επειδή οι κλάσεις είναι  και το εύρος είναι , το πλάτος ισούται με .

*[ Β΄ τρόπος: ]*

Για την κεντρική τιμή  της κλάσης  ισχύει .

Από τα δεδομένα έχουμε ότι 



και άρα .

Ισχύουν, επίσης 

 και



|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Κλάσεις** | **Κεντρικές τιμές** | **Συχνότητα** | **Σχετική Συχνότητα** | **Αθροιστική Συχνότητα** | **Αθροιστική σχετική Συχνότητα** |
| **[10,** 12) | 11 | 6 | 10 | 6 | 10 |
| [12, 14) | 13 | 12 | 20 | 18 | 30 |
| [14, 16) | 15 | 24 | 40 | 42 | 70 |
| [16, 18) | 17 | 12 | 20 | 54 | 90 |
| [18, **20)** | 19 | 6 | 10 | 60 | 100 |
| **Σύνολο** | - | 60 | 100 | - | - |

Β2. Για τη μέση τιμή έχουμε .

**Εύρεση της διαμέσου δ**

Κάνουμε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων τοις εκατό, όπως φαίνεται παρακάτω,



Από την ομοιότητα των τριγώνων ΓΙΗ και ΓΘΔ έχουμε,



*(διαφορετικά βρίσκουμε την ευθεία ΓΔ, αφού γνωρίζουμε τις συντεταγμένες των σημείων Γ και Δ, στη συνέχεια αντικαθιστούμε στην εξίσωσή της το σημείο (δ, 50) και βρίσκουμε το δ).*

**Β΄ τρόπος** *(Προσοχή, δεν δίνετε συγκεκριμένα σε αυτό το υποερώτημα ότι οι παρατηρήσεις στα διαστήματα αυτά είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες, άρα η λύση αυτή δεν είναι η ενδεδειγμένη)*

H διάμεσος έχει την ιδιότητα : το  του δείγματος έχει τιμή μεγαλύτερη ή ίση από αυτήν.

Αφού  έχουμε ότι η διάμεσος θα είναι το μέσο της  άρα .

*Σημείωση: Διαπιστώνουμε ότι η μέση τιμή και η διάμεσος ταυτίζονται.*

Β3. To  είναι το μισό του , που αντιστοιχεί στο μέσο της  άρα ο βαθμός είναι τουλάχιστον για να πάρουν οι μαθητές έπαινο.

**Θέμα Γ**

Γ1. Έχουμε,





Τα απλά ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου είναι:

.

Γ2. Ζητάμε το ενδεχόμενο .

Όμως , συνεπώς

.

*(διαφορετικά με τους κανόνες λογισμού,*

* ).*

Επίσης ζητάμε το ενδεχόμενο .

**Α΄ τρόπος (αναλυτικά)**

Έχουμε, , άρα , οπότε

.

**Β΄ τρόπος** *(με τύπους De Morgan. Προσοχή: Κανονικά χρειάζονται αποδείξεις, οπότε καλό είναι να τους αποφεύγετε όσο μπορείτε)*

 ,οπότε 

Όμως , άρα  οπότε .

**Γ τρόπος (τύποι λογισμού)**

Έχουμε,



Γ3. Η συνάρτηση  συνεχής και παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με .

Θέλουμε βάσει του δοθέντος ενδεχομένου η συνάρτηση να είναι γνησίως αύξουσα,

δηλαδή αρκεί: .

Βρίσκουμε την διακρίνουσα του παραπάνω τριωνύμου



εφόσον ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής του πολυωνύμου είναι θετικός, αρκεί Δ < 0,

 οπότε ισχύει.

Άρα για  δηλαδή το E είναι βέβαιο ενδεχόμενο.

**Β΄ τρόπος (με αντικαταστάσεις):** Επειδή  αντικαθιστούμε (τέσσερις φορές) την τιμή του

κ (= -1, 0,1, 2) στη συνάρτηση και εξετάζουμε αν η f είναι γνησίως αύξουσα…

**Θέμα Δ**

Δ1. i) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι :



ii) Για κάθε έχουμε  .

Όμως,







που σημαίνει ότι η E είναι γνησίως φθίνουσα στο [0,50] και γνησίως αύξουσα στο [50,100], συνεπώς στο  έχουμε την ελάχιστη τιμή για το εμβαδόν Ε.

Δ2. Είναι  και επίσης .Συνεπώς .

Δ3. Από τον τύπο που μας δίνει προκύπτει ότι



Τα ζητούμενα εμβαδά προκύπτουν από  και η ζητούμενη μέση τιμή δίνεται από τον τύπο:



Δ4. Για τις ευρεθείσες τιμές του  από τα προηγούμενα ερωτήματα οι μόνες που είναι πολλαπλάσια του  ή του  είναι οι αριθμοί 3,4,6,8,9,12,15,16,18,20,21,24 δηλαδή το ενδεχόμενο είναι



και εφόσον η εκλογή γίνεται τυχαία, τότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

 .