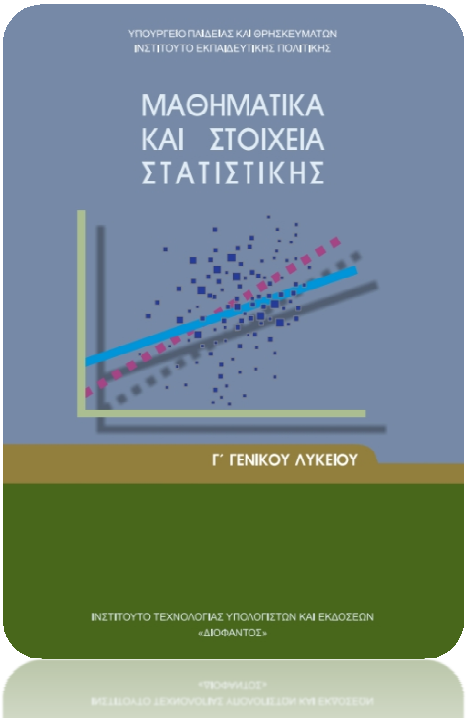
ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Παρασκευή
20 – 05 – 16
11:20 πμ



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ
lisari team

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΓΚΡΙΜΠΑΒΙΩΤΗΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΖΑΜΠΕΛΗΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΚΑΚΑΝΟΣ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΜΠΑΔΕΜΗΣ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΑΠΑΜΙΚΡΟΥΛΗΣ
ΘΩΜΑΣ ΠΟΔΗΜΑΤΑΣ
ΧΡΗΣΤΟΣ ΣΙΣΚΑΣ
ΤΑΚΗΣ ΤΣΑΚΑΛΑΚΟΣ
ΜΑΚΗΣ ΧΑΤΖΟΠΟΥΛΟΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2016

Οι απαντήσεις και οι λύσεις

είναι αποτέλεσμα της συλλογικής δουλειάς

των μελών της **lisari team**

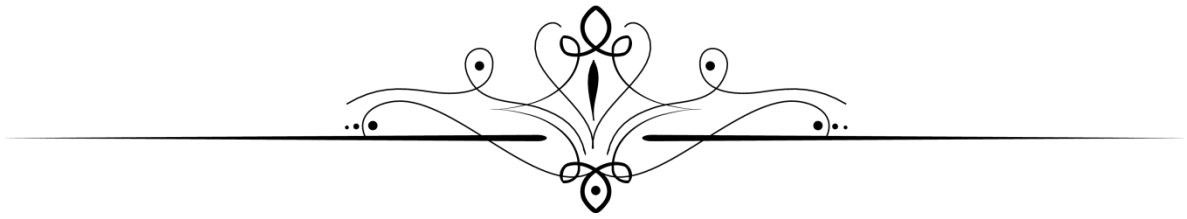
http://lisari.blogspot.gr/2014/10/blog-post_13.html

2η έκδοση: 20 – 05 – 2015 *(συνεχής ανανέωση)*

Οι λύσεις διατίθεται **αποκλειστικά**

και **ελεύθερα** από το μαθηματικό blog

http://lisari.blogspot.gr



Πρόλογος

Στο παρόν αρχείο περιλαμβάνονται οι λύσεις των Πανελλαδικών Εξετάσεων στο μάθημα **Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής**. Η παρουσίαση των λύσεων είναι πλήρης και αναλυτική στο μέγιστο δυνατό, προκειμένου οι μαθητές να μπορούν να μελετήσουν και να επεξεργαστούν εύκολα το αρχείο.

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε αποκλειστικά από τη γνωστή **διαδικτυακή ομάδα Μαθηματικών** από διάφορα μέρη της Ελλάδος, τη **lisari team. Προσπάθησαν και τα κατάφεραν να δώσουν πρώτοι διαδικτυακά τις πλήρεις λύσεις σε ένα αρχείο pdf!!**

Μετά από την αρχική επιμέλεια των λύσεων ακολούθησαν ενδελεχείς έλεγχοι, διορθώσεις και βελτιώσεις με στόχο μια **πληρέστερη και πιο ποιοτική παρουσίαση**. Ζητούμε συγνώμη για τυχόν παραλείψεις, λάθη ή αστοχίες που ενδεχομένως θα έχουν διαφύγει της προσοχής μας, γεγονός αναπόφευκτο δεδομένων των στενών χρονικών περιθωρίων. Θα ακολουθήσουν επόμενες εκδόσεις, όπου η εν λόγω παρουσίαση θα βελτιωθεί, ίσως εμπλουτιστεί και με εναλλακτικές λύσεις. Οποιαδήποτε σχόλια, παρατηρήσεις, διορθώσεις και βελτιώσεις επί των λύσεων είναι ευπρόσδεκτα στην ηλεκτρονική διεύθυνση lisari.blogspot@gmail.com.

Με εκτίμηση

lisari team

20 – 05 – 2016

lisari team

1. *Αντωνόπουλος Νίκος (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου "Κατεύθυνση" - Άργος)*
2. *Αυγερινός Βασίλης (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου "ΔΙΑΤΑΞΗ" - Ν. Σμύρνη και Νίκαια)*
3. *Βελαώρας Γιάννης (Φροντιστήριο "ΒΕΛΑΩΡΑΣ" - Λιβαδειά Βοιωτίας)*
4. *Βοσκάκης Σήφης (Φροντιστήριο "Ευθύνη" - Ρέθυμνο)*
5. *Γιαννόπουλος Μιχάλης (Θεσσαλονίκη - Αμερικάνικη Γεωργική Σχολή)*
6. *Γκριμπαβιώτης Παναγιώτης (Φροντιστήριο "Αστρολάβος" - Άρτα)*
7. *Δούδης Δημήτρης (3ο Λύκειο Αλεξανδρούπολης)*
8. *Ζαμπέλης Γιάννης (Φροντιστήρια "Πουκαμισάς" Γλυφάδας)*
9. *Ηλίας Ζωβοΐλης (Μαθηματικός - Χαϊδάρι)*
10. *Κακαβάς Βασίλης (Φροντιστήριο "Ώθηση" - Μαρούσι)*
11. *Κάκανος Γιάννης (Φροντιστήριο "Παπαπαναγιώτου – Παπαπαύλου" - Σέρρες)*
12. *Κανάβης Χρήστος (Διδακτορικό στο ΕΜΠ – 2ο ΣΔΕ φυλακών Κορυδαλλού)*
13. *Καρδαμίτσης Σπύρος (Πρότυπο Λύκειο Αναβρύτων)*
14. *Κοπάδης Θανάσης (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίων "19+" - Πολύγωνο)*
15. *Κουλούρης Ανδρέας (3ο Λύκειο Γαλατσίου)*
16. *Κουστέρης Χρήστος (Φροντιστήριο "Στόχος" - Περιστέρι)*
17. *Μανώλης Ανδρέας (Φροντιστήριο "Ρηγάκης" - Κοζάνη)*
18. *Μαρούγκας Χρήστος (3ο ΓΕΛ Κηφισιάς)*
19. *Δημήτρης Μπαδέμης (Φροντιστήριο "Πουκαμισάς" - Γλυφάδας)*
20. *Νάννος Μιχάλης (1ο Γυμνάσιο Σαλαμίνας)*
21. *Νικολόπουλος Θανάσης (Λύκειο Κατασταρίου, Ζάκυνθος)*
22. *Παγώνης Θεόδωρος (Φροντιστήριο "Φάσμα" - Αγρίνιο)*
23. *Παπαδομανωλάκη Μαρία (Συνιδιοκτήτρια Πρότυπου Κέντρου Μάθησης "ΔΙΑΚΡΙΣΙΣ" - Ρέθυμνο)*
24. *Παπαμικρούλης Δημήτρης (Εκπαιδευτικός Οργανισμός "Ρόμβος")*
25. *Πάτσης Ανδρέας (Βόνιτσα - Μαθηματικός)*
26. *Ποδηματάς Θωμάς (Σπουδαστήριο Μαθηματικών Θωμάς και Ρόζα Ποδηματά - Βόλος)*
27. *Ράπτης Γιώργος (6ο ΓΕΛ Βόλου)*
28. *Σίσκας Χρήστος (Φροντιστήριο "Μπαχαράκης" - Θεσσαλονίκη)*
29. *Σκομπρής Νίκος (Συγγραφέας – 1ο Λύκειο Χαλκίδας)*
30. *Σπλήνης Νίκος (Φροντιστήριο "ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ" - Ηράκλειο Κρήτης)*
31. *Σταυρόπουλος Παύλος (Ιδιωτικά Εκπαιδευτήρια Δούκα)*
32. *Σταυρόπουλος Σταύρος (Γραμματέας Ε.Μ.Ε Κορινθίας - Γυμνάσιο Λ.Τ. Λεχαίου Κορινθίας)*
33. *Τρύφων Παύλος (1ο Εσπερινό ΕΠΑΛ Περιστερίου)*
34. *Τσακαλάκος Τάκης (συνταξιούχος αλλά ενεργός μαθηματικός)*
35. *Χαραλάμπους Σταύρος (Θεσσαλονίκη - Μουσικό Λύκειο)*
36. *Χατζόπουλος Μάκης (1ο ΓΕΛ Πετρούπολης)*

lisari team / Σχολικό έτος 2015 – 16

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 20 ΜΑΙΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΞΙ (6) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1.Σχολικό βιβλίο σελ. 150

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 87

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 14

Α4. α) Σωστό **β)**Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Σωστό **ε)** Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι

$$f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+6x-1,\ x\in\mathbb{R}$$

Έχουμε

$$f'(x)=x^2-5x+6 \text{ με } x\in\mathbb{R}$$

οπότε

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-5x+6=0$$

$$\Delta=25-24=1 \text{ άρα } x_{1,2}=\frac{5\pm1}{2}\Leftrightarrow x=3 \text{ ή } x=2$$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗		↘		↗	

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1=(-\infty,2]$ και στο $\Delta_3=[3,+\infty)$, ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2=[2,3]$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1=2$ με τιμή

$$f(2)=\frac{8}{3}-\frac{5}{2}\cdot 4+6\cdot 2-1=\frac{8}{3}+1=\frac{11}{3}$$

- Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2=3$ με τιμή

$$f(3)=\frac{27}{3}-\frac{5}{2}\cdot 9+6\cdot 3-1=26-\frac{45}{2}=\frac{7}{2}$$

Β2. Η εφαπτομένη έχει εξίσωση $(\varepsilon): y=\alpha x+\beta$ (1)

Ισχύει ότι

$$\alpha=f'(0)=6$$

άρα $(\varepsilon): y=6x+\beta$

Όμως $A\in(\varepsilon)$ άρα

$$f(0)=6\cdot 0+\beta \overset{f(0)=-1}{\Leftrightarrow} \beta=-1$$

Οπότε

$$(\varepsilon): y=6x-1$$

Β3. Είναι

$$\lim_{x\to -1}\frac{f'(x)-12}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-5x+6-12}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-5x-6}{x+1}$$

Για το x^2-5x-6 έχουμε

$$\Delta=25+24=49 \text{ άρα } x_{1,2}=\frac{5\pm 7}{2}\Leftrightarrow x=6 \text{ ή } x=-1$$

Οπότε

$$x^2-5x-6=(x-6)(x+1)$$

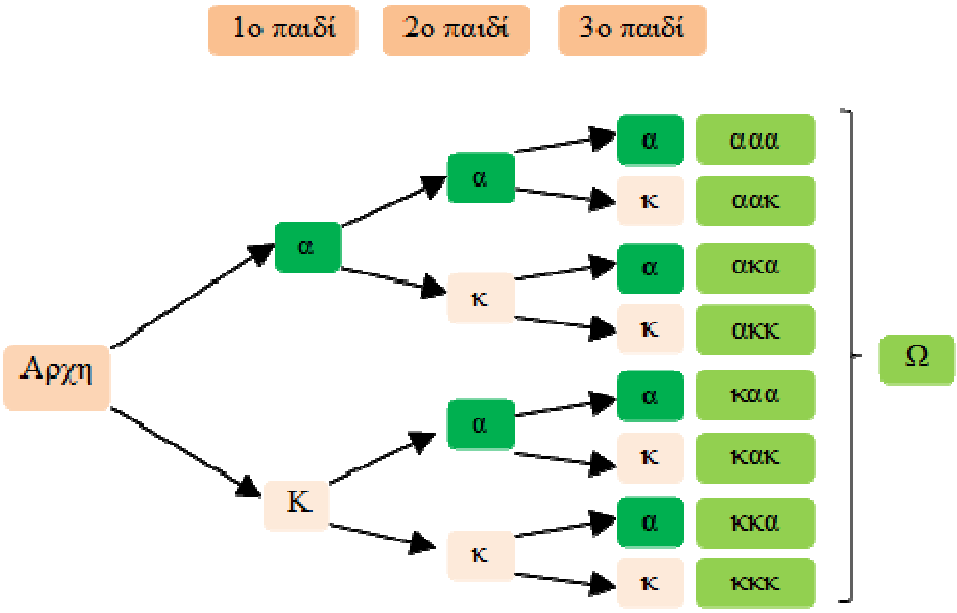
Τελικά

$$\lim_{x\to -1}\frac{f'(x)-12}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-6)}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x-6)=-7$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

α: «το παιδί είναι αγόρι» και κ: «το παιδί είναι κορίτσι»



Άρα, ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι

$$\Omega = \{\text{ααα}, \text{αακ}, \text{ακα}, \text{ακκ}, \text{καα}, \text{κακ}, \text{κκα}, \text{κκκ}\}$$

Γ2. Τα ενδεχόμενα με αναγραφή των στοιχείων τους είναι:

$$A = \{\text{καα}, \text{κακ}, \text{κκα}, \text{κκκ}\}$$

$$B = \{\text{ακκ}, \text{κακ}, \text{κκα}, \text{κκκ}\}$$

$$\Gamma = \{\text{ααα}, \text{αακ}, \text{κκα}, \text{κκκ}\}$$

Γ3. α) Τα ενδεχόμενα Δ, Ε, Ζ με αναγραφή των στοιχείων τους είναι:

$$\Delta = A \cap B = \{\text{κακ}, \text{κκα}, \text{κκκ}\}$$

$$E = A \cup B = \{\text{ακκ}, \text{καα}, \text{κακ}, \text{κκα}, \text{κκκ}\}$$

$$Z = \Gamma - E = \{\text{ααα}, \text{αακ}\}$$

Άρα:

$$N(\Delta) = 3 \ , \ N(E) = 5 \ , N(Z) = 2 \ , \ N(\Omega) = 8$$

Από τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας είναι:

$$P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} \text{ άρα } P(\Delta) = \frac{3}{8}$$

$$P(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)} \text{ άρα } P(E) = \frac{5}{8}$$

$$P(Z) = \frac{N(Z)}{N(\Omega)} \text{ άρα } P(Z) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

β) Το ενδεχόμενο: «δεν πραγματοποιείται κανένα από τα Α, Β» είναι το $(A\cup B)'$.

$$P(H)=P\left((A\cup B)'\right)=1-P(A\cup B)$$

άρα

$$P(H)=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$$

Το ενδεχόμενο: «πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα Α,Β» είναι το $(A-B)\cup(B-A)$:

$$\begin{aligned}P(\Theta)=P\big((A-B)\cup(B-A)\big) &\underset{\text{ασυμβίβαστα}}{\overset{A-B,B-A}{=}} P(A-B)+P(B-A)\\ &=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)\\ &=P(A\cup B)-P(A\cap B)\end{aligned}$$

οπότε

$$P(\Theta)=\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική τιμή x_i
$[8,8+c)$	
$[8+c,8+2c)$	14

Άρα

$$\frac{8+c+8+2c}{2}=14\Leftrightarrow\frac{16+3c}{2}=14\Leftrightarrow 16+3c=28\Leftrightarrow 3c=12\Leftrightarrow c=4$$

Δ2. Ο πίνακας γίνεται:

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i	$x_i\cdot v_i$
$[8,12)$	10	20	200
$[12,16)$	14	15	210
$[16,20)$	18	10	180
$[20,24)$	22	v_4	$22v_4$
Σύνολο		$45+v_4$	$590+22v_4$

Οπότε

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i v_i}{\nu} \Leftrightarrow 14 = \frac{590 + 22v_4}{45 + v_4}$$
$$\Leftrightarrow (45 + v_4) \cdot 14 = 590 + 22v_4$$
$$\Leftrightarrow 630 + 14v_4 = 590 + 22v_4$$
$$\Leftrightarrow 40 = 8v_4$$
$$\Leftrightarrow v_4 = 5$$

Άρα ο τελικός πίνακας γίνεται

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i	$x_i \cdot v_i$
$[8,12)$	10	20	200
$[12,16)$	14	15	210
$[16,20)$	18	10	180
$[20,24)$	22	5	110
Σύνολο		50	700

Δ3. Πάνω από 9 λεπτά χρειάστηκαν

$$\frac{3}{4}v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = \frac{3}{4}20 + 15 + 10 + 5 = 45 \text{ υπολογιστές}$$

Δ4. Έχουμε

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα v_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$
$[8,12)$	10	20	-4	16	320
$[12,16)$	14	15	0	0	0
$[16,20)$	18	10	4	16	160
$[20,24)$	22	5	8	64	320
Σύνολο		50		564	800

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 \cdot v_i}{v} = \frac{800}{50} = 16$$

Άρα $s = 4$

και

$$CV_x = \frac{s}{|\overline{x}|} = \frac{4}{14} \simeq 0,28 > 0,1 \quad \text{ή} \quad (28\% > 10\%)$$

άρα το δείγμα είναι ανομοιογενές

Δ5. Έχουμε

x_i **:** αρχικός χρόνος

y_i **:** τελικός χρόνος

Συνδέονται με την σχέση

$$y_i = 0,8x_i,\ i \in \{1,2,3....50\}$$

$$\overline{y} = 0,8 \cdot \overline{x}$$

$$s_y = |0,8| \cdot s_x$$

$$CV_y = \frac{s_y}{|\overline{y}|} = \frac{0,8 \cdot s_x}{0,8\overline{x}} = \frac{s_x}{\overline{x}} = CV_x$$

Το CV παραμένει αμετάβλητο, άρα το δείγμα είναι ανομοιογενές