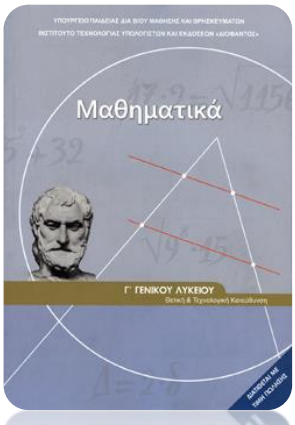
ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΤΕΤΑΡΤΗ

18 – 05 – 16

(edit) **12 : 35 π.μ**



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

lisari team

ΝΙΚΟΣ ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΒΕΛΑΩΡΑΣ
ΣΗΦΗΣ ΒΟΣΚΑΚΗΣ
ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ ΓΚΡΙΜΠΑΒΙΩΤΗΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΖΑΜΠΕΛΗΣ
ΓΙΑΝΝΗΣ ΚΑΚΑΝΟΣ
ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΟΥΣΤΕΡΗΣ
ΑΝΔΡΕΑΣ ΜΑΝΩΛΗΣ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΜΠΑΔΕΜΗΣ
ΘΑΝΑΣΗΣ ΝΙΚΟΛΟΠΟΥΛΟΣ
ΘΕΟΔΩΡΟΣ ΠΑΓΩΝΗΣ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΠΑΠΑΜΙΚΡΟΥΛΗΣ
ΜΑΡΙΑ ΠΑΠΑΔΟΜΑΝΩΛΑΚΗ
ΑΝΔΡΕΑΣ ΠΑΤΣΗΣ
ΘΩΜΑΣ ΠΟΔΗΜΑΤΑΣ
ΧΡΗΣΤΟΣ ΣΙΣΚΑΣ
ΝΙΚΟΣ ΣΠΛΗΝΗΣ
ΤΑΚΗΣ ΤΣΑΚΑΛΑΚΟΣ
ΜΑΚΗΣ ΧΑΤΖΟΠΟΥΛΟΣ

ΘΕΜΑΤΑ
ΚΑΙ
ΛΥΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2016

3η έκδοση

Οι απαντήσεις και οι λύσεις

είναι αποτέλεσμα της συλλογικής δουλειάς

των μελών της **lisari team**

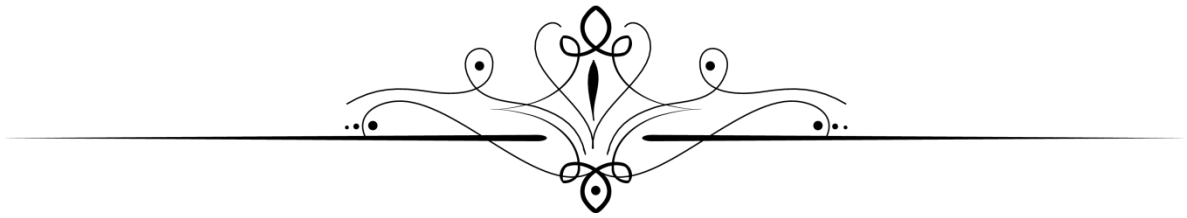
http://lisari.blogspot.gr/2014/10/blog-post_13.html

1η έκδοση: 18 – 05 – 2015 *(συνεχής ανανέωση)*

Οι λύσεις διατίθεται **αποκλειστικά**

από το μαθηματικό blog

http://lisari.blogspot.gr



Πρόλογος

Στο παρόν αρχείο περιλαμβάνονται οι λύσεις των Πανελλαδικών Εξετάσεων 2016 στο μάθημα **Μαθηματικά Προσανατολισμού θετικών Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής.** Η παρουσίαση των λύσεων είναι πλήρης και αναλυτική στο μέγιστο δυνατό, προκειμένου οι μαθητές να μπορούν να μελετήσουν και να επεξεργαστούν εύκολα το αρχείο.

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε αποκλειστικά από τη γνωστή **διαδικτυακή ομάδα Μαθηματικών** από διάφορα μέρη της Ελλάδος, τη **lisari team.**

Προσπάθησαν και τα κατάφεραν να δώσουν πρώτοι διαδικτυακά τις πλήρεις λύσεις σε ένα αρχείο pdf για την διευκόλυνση μαθητών και καθηγητών!!

Την αρχική συγγραφή των λύσεων ακολούθησαν ενδελεχείς έλεγχοι, διορθώσεις και βελτιώσεις με στόχο μια **πληρέστερη και πιο ποιοτική παρουσίαση**. Ζητούμε συγνώμη για τυχόν παραλείψεις, λάθη ή αστοχίες που ενδεχομένως θα έχουν διαφύγει της προσοχής μας, γεγονός αναπόφευκτο δεδομένων των στενών χρονικών περιθωρίων. Θα ακολουθήσουν επόμενες εκδόσεις, όπου η εν λόγω παρουσίαση θα βελτιωθεί, ίσως εμπλουτιστεί και με εναλλακτικές λύσεις. Οποιαδήποτε σχόλια, παρατηρήσεις, διορθώσεις και βελτιώσεις επί των λύσεων είναι ευπρόσδεκτα στην ηλεκτρονική διεύθυνση lisari.blogspot@gmail.com.

Με εκτίμηση

lisari team

18 – 05 – 2016

lisari team

1. *Αντωνόπουλος Νίκος (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου "Κατεύθυνση" - Άργος)*
2. *Αυγερινός Βασίλης (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου "ΔΙΑΤΑΞΗ" - Ν. Σμύρνη και Νίκαια)*
3. *Βελαώρας Γιάννης (Φροντιστήριο "ΒΕΛΑΩΡΑΣ" - Λιβαδειά Βοιωτίας)*
4. *Βοσκάκης Σήφης (Φροντιστήριο "Ευθύνη" - Ρέθυμνο)*
5. *Γιαννόπουλος Μιχάλης (Θεσσαλονίκη - Αμερικάνικη Γεωργική Σχολή)*
6. *Γκριμπαβιώτης Παναγιώτης (Φροντιστήριο "Αστρολάβος" - Άρτα)*
7. *Δούδης Δημήτρης (3ο Λύκειο Αλεξανδρούπολης)*
8. *Ζαμπέλης Γιάννης (Φροντιστήρια "Πουκαμισάς" Γλυφάδας)*
9. *Ηλίας Ζωβοΐλης (Μαθηματικός - Χαϊδάρι)*
10. *Κακαβάς Βασίλης (Φροντιστήριο "Ώθηση" - Μαρούσι)*
11. *Κάκανος Γιάννης (Φροντιστήριο "Παπαπαναγιώτου – Παπαπαύλου" - Σέρρες)*
12. *Κανάβης Χρήστος (Διδακτορικό στο ΕΜΠ – 2ο ΣΔΕ φυλακών Κορυδαλλού)*
13. *Καρδαμίτσης Σπύρος (Πρότυπο Λύκειο Αναβρύτων)*
14. *Κοπάδης Θανάσης (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίων "19+" - Πολύγωνο)*
15. *Κουλούρης Ανδρέας (3ο Λύκειο Γαλατσίου)*
16. *Κουστέρης Χρήστος (Φροντιστήριο "Στόχος" - Περιστέρι)*
17. *Μανώλης Ανδρέας (Φροντιστήριο "Ρηγάκης" - Κοζάνη)*
18. *Μαρούγκας Χρήστος (3ο ΓΕΛ Κηφισιάς)*
19. *Δημήτρης Μπαδέμης (Φροντιστήριο "Πουκαμισάς" - Γλυφάδας)*
20. *Νάννος Μιχάλης (1ο Γυμνάσιο Σαλαμίνας)*
21. *Νικολόπουλος Θανάσης (Λύκειο Κατασταρίου, Ζάκυνθος)*
22. *Παγώνης Θεόδωρος (Φροντιστήριο "Φάσμα" - Αγρίνιο)*
23. *Παπαδομανωλάκη Μαρία (Συνιδιοκτήτρια Πρότυπου Κέντρου Μάθησης "ΔΙΑΚΡΙΣΙΣ" - Ρέθυμνο)*
24. *Παπαμικρούλης Δημήτρης (Εκπαιδευτικός Οργανισμός "Ρόμβος")*
25. *Πάτσης Ανδρέας (Λευκάδα - Μαθηματικός)*
26. *Ποδηματάς Θωμάς (Σπουδαστήριο Μαθηματικών Θωμά και Ρόζα Ποδηματά - Βόλος)*
27. *Ράπτης Γιώργος (6ο ΓΕΛ Βόλου)*
28. *Σίσκας Χρήστος (Φροντιστήριο "Μπαχαράκης" - Θεσσαλονίκη)*
29. *Σκομπρής Νίκος (Συγγραφέας – 1ο Λύκειο Χαλκίδας)*
30. *Σπλήνης Νίκος (Φροντιστήριο "ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ" - Ηράκλειο Κρήτης)*
31. *Σταυρόπουλος Παύλος (Ιδιωτικά Εκπαιδευτήρια Δούκα)*
32. *Σταυρόπουλος Σταύρος (Γραμματέας Ε.Μ.Ε Κορινθίας - Γυμνάσιο Λ.Τ. Λεχαίου Κορινθίας)*
33. *Τρύφων Παύλος (1ο Εσπερινό ΕΠΑΛ Περιστερίου)*
34. *Τσακαλάκος Τάκης (συνταξιούχος αλλά ενεργός μαθηματικός)*
35. *Χαραλάμπους Σταύρος (Θεσσαλονίκη - Μουσικό Λύκειο)*
36. *Χατζόπουλος Μάκης (1ο ΓΕΛ Πετρούπολης)*

lisari team / Σχολικό έτος 2015 – 16

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΤΕΤΑΡΤΗ 18 ΜΑΙΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΝΝΙΑ (9) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

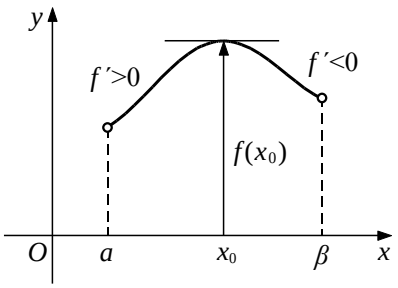
Α1. *Σχολικό βιβλίο, Θεώρημα σελ.262, υποερώτημα i*

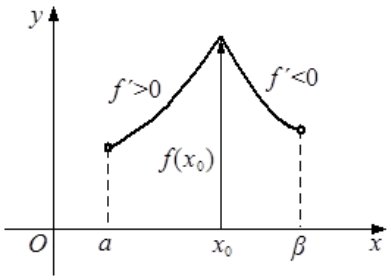
Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ x\in(\alpha,x_0]. \qquad (1)$$

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε:

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ x\in[x_0,\beta). \qquad (2)$$





Επομένως, λόγω των (1) και (2), ισχύει:

$$f(x)\le f(x_0),\ \text{για κάθε}\ x\in(\alpha,\beta),$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Α2. *Σχολικό βιβλίο, σελ.141*

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται **ίσες** όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού Α **και**
- για κάθε $x\in A$ ισχύει $f(x)=g(x)$.

Για να δηλώσουμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες γράφουμε $f = g$.

Α3. *Σχολικό βιβλίο, σελ.246-247*

Θεώρημα Μέσης Τιμής

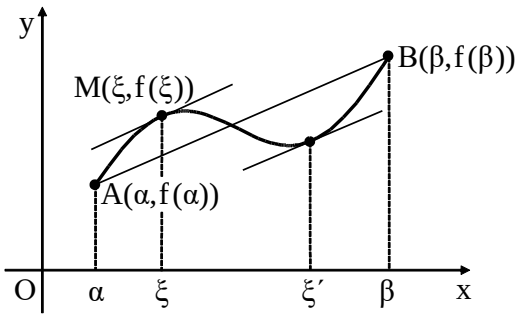
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Μέσης Τιμής

Εφόσον υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ γεωμετρικά σημαίνει ότι υπάρχει **ένα, τουλάχιστον**, σημείο $M(\xi, f(\xi))$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο M να είναι παράλληλη της ευθείας AB.



Α4. (α) Λάθος
(β) Σωστό
(γ) Λάθος
(δ) Σωστό
(ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x) = \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Ο πίνακας μεταβολών της f είναι ο ακόλουθος:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f′(x)	−	0	+
f	↘	min	↗

Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$ και παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο σημείο Ο(0, 0).

Β2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f''(x) = \frac{2\left(1-3x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

Συνεπώς έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
f″(x)	−	0 +	0	−
f	∩	Σ.Κ. ∪	Σ.Κ.	∩

Άρα η f είναι κοίλη σε καθένα από τα διαστήματα $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και $\left[\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$, κυρτή στο διάστημα $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και έχει σημεία καμπής στα σημεία $A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right), B\left(\frac{\sqrt{3}}{3},f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$.

Β3. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη αφού η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
Επίσης:

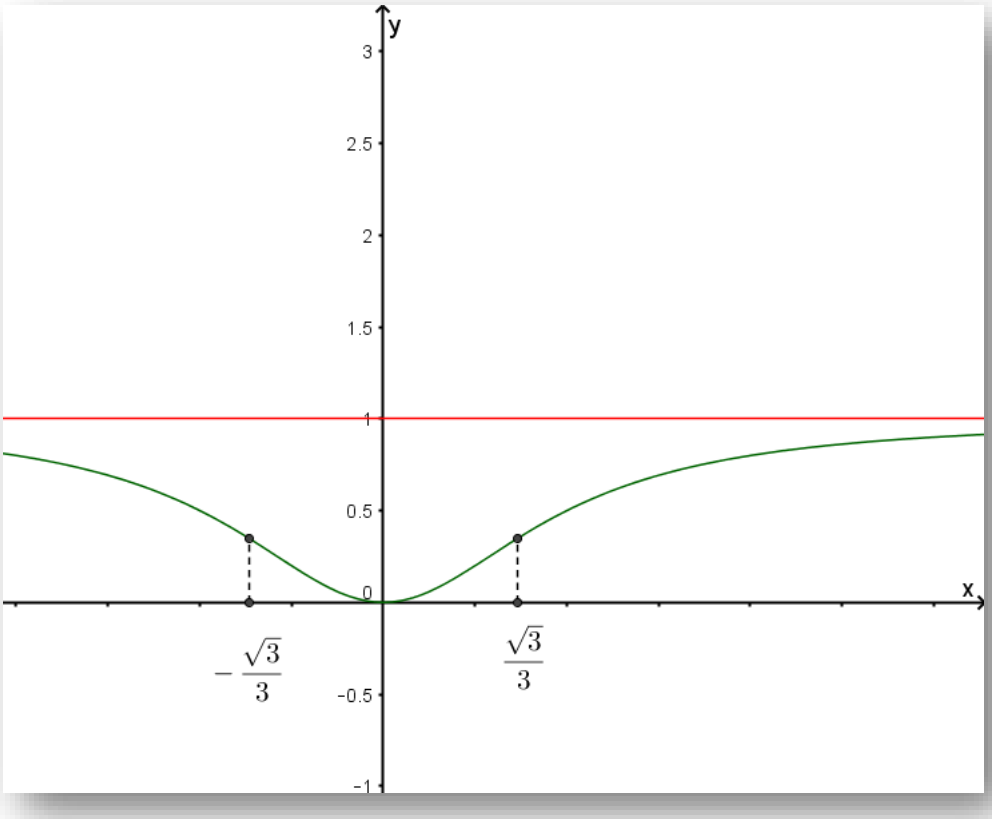
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

όμοια

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$$

άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 1$ στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

Β4. Η f είναι άρτια, αφού $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και τέμνει τον άξονα x΄x στην αρχή των αξόνων. Επίσης $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει για $x = 0$. Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πιο πάνω από τον άξονα x΄x εκτός από το σημείο (0, 0).
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Γνωρίζουμε ότι:

$$\ln x \le x-1 \text{ για κάθε } x>0,$$

με την ισότητα να ισχύει για $x=1$.

Αν θέσουμε όπου x το e^{x^2} τότε γίνεται:

$$\ln e^{x^2} \le e^{x^2}-1 \Leftrightarrow x^2 \le e^{x^2}-1 \Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1 \ge 0$$

με την ισότητα να ισχύει για $e^{x^2}=1 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$.

Άρα η εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0$ έχει μοναδική λύση την $x=0$.

Γ2. Έχουμε:

$$f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2 \Leftrightarrow |f(x)|=e^{x^2}-x^2-1$$

αφού $e^{x^2}-x^2-1 \ge 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Όμως

$$f(x)=0 \Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1=0 \Leftrightarrow x=0$$

οπότε η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα δεν μηδενίζεται στα διαστήματα $(-\infty,0),(0,+\infty)$ άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο κατά διαστήματα.

Οπότε:

- Αν $x<0$ και $f(x)>0$ τότε $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$
- Αν $x<0$ και $f(x)<0$ τότε $f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$
- Αν $x>0$ και $f(x)>0$ τότε $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$
- Αν $x>0$ και $f(x)<0$ τότε $f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$

Και επειδή f(0) = 0 όλες οι συνεχείς συναρτήσεις είναι:

$$f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x \in \mathbb{R}$$

$$f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right),\ x \in \mathbb{R}$$

$$f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1 & ,x \ge 0 \\ -\left(e^{x^2}-x^2-1\right) & ,x<0 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1 & ,x<0 \\ -\left(e^{x^2}-x^2-1\right) & ,x \ge 0 \end{cases}$$

Γ3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f'(x)=2x\left(e^{x^2}-1\right)$$

Επειδή $x^2 \ge 0 \Leftrightarrow e^{x^2} \ge 1 \Leftrightarrow e^{x^2}-1 \ge 0$ το πρόσημο της f' εξαρτάται από το πρόσημο του x.

Επίσης για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$f''(x)=4x^2e^{x^2}+2e^{x^2}-2=4x^2e^{x^2}+2\left(e^{x^2}-1\right) \ge 0$$

και επειδή η f'' είναι συνεχής στο $x_0=0$ η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Β΄ τρόπος

Είναι

$$f''(x)=2\left[2x^2e^{x^2}-1+e^{x^2}\right]$$

Για $x=0$ είναι $f''(0)=0$, οπότε ζητάμε:

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow 2x^2e^{x^2}-1+e^{x^2}>0 \Leftrightarrow 2x^2e^{x^2}>1-e^{x^2} \overset{\cdot e^{-x^2}}{\Leftrightarrow} 2x^2>e^{-x^2}-1$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+1>e^{-x^2} \Leftrightarrow \left(2x^2+1\right)e^{x^2}>1$$

Η τελευταία αληθεύει για κάθε $x\neq 0$, αφού $2x^2+1>1$ και $e^{x^2}>e^0=1$.

Γ4. Προφανής λύση της εξίσωσης είναι η $x=0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=f(x+3)-f(x),\ D_g=\mathbb{R}$$

Είναι

$$g'(x)=f'(x+3)-f'(x),\ x\in\mathbb{R}$$

αφού η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ η f΄ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Ακόμα

$$x+3>x \overset{f'\nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x+3)>f'(x) \Leftrightarrow f'(x+3)-f'(x)>0 \Leftrightarrow g'(x)>0$$

άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Έχουμε:

$$x>0 \Leftrightarrow |\eta\mu x|<x \overset{g\nearrow}{\Leftrightarrow} g(|\eta\mu x|)<g(x) \Leftrightarrow f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)<f(x+3)-f(x)$$

Άρα μοναδική λύση της εξίσωσης είναι η $x=0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε

$$\int_0^\pi (f(x)+f''(x))\eta\mu x\,dx = \pi \Leftrightarrow \int_0^\pi f(x)\eta\mu x\,dx + \int_0^\pi f''(x))\eta\mu x\,dx = \pi \Leftrightarrow$$

$$\int_0^\pi f(x)\eta\mu x\,dx + \left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu x\,dx = \pi \Leftrightarrow$$

$$\cancel{\int_0^\pi f(x)\eta\mu x\,dx} + f'(\pi)\cancel{\eta\mu\pi^0} - f'(0)\cancel{\eta\mu 0^0} - \left[f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^\pi + \cancel{\int_0^\pi f(x)(-\eta\mu x)\,dx} = \pi \Leftrightarrow$$

$$-f(\pi)\sigma\upsilon\nu\pi + f(0)\sigma\upsilon\nu 0 = \pi \Leftrightarrow f(\pi)+f(0)=\pi \quad \textbf{(1)}$$

Ακόμα, θεωρούμε

$$g(x) = \frac{f(x)}{\eta\mu x} \Leftrightarrow f(x) = g(x)\cdot\eta\mu x$$

για x κοντά στο 0 με $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 1$ και η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ ως παραγωγίσιμη, οπότε

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

Έτσι έχουμε,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}[\eta\mu x\cdot g(x)] = \eta\mu 0\cdot 1 = 0 \text{ άρα } f(0) = 0.$$

Συνεπώς η (1) :

$$\mathbf{f(\pi) = \pi}$$

Επιπλέον έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x\cdot g(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\cdot g(x) = 1\cdot 1 = 1\in\mathbb{R}$$

Άρα,

$$\mathbf{f'(0) = 1}$$

Δ2. α) Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 0$.

Επειδή $D_f = \mathbb{R}$ το x_0 είναι εσωτερικό του πεδίου ορισμού και από θ.Fermat : $f'(x_0) = 0$

Είναι

$$e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

οπότε

$$f'(x)\cdot e^{f(x)} + 1 = f'(x)\cdot f'(f(x)) + e^x \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Άρα

$$\cancel{f'(x_0)^0}\cdot e^{f(x_0)} + 1 = \cancel{f'(x_0)^0}\cdot f'(f(x_0)) + e^{x_0} \Leftrightarrow e^{x_0} = 1 \Leftrightarrow x_0 = 0$$

Όμως, f ΄(0) = 1 ≠ 0, άτοπο. Άρα η **f δεν παρουσιάζει ακρότατο** .

β) Από Δ2α f΄(x) ≠ 0 και από συνέπεια του θ.Bolzano, η f θα διατηρεί πρόσημο (f ΄(x) συνεχής) , άρα f ΄(x) > 0 για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή f ΄(x) < 0 για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Όμως, f ΄(0) = 1 > 0, οπότε f ΄(x) > 0 για κάθε $x\in\mathbb{R}$ που σημαίνει ότι η f είναι γν. αύξουσα .

Δ3. Είναι

$$\left.\begin{array}{l} \text{H f συνεχής στο } \mathbb{R} \\ \text{f } \nearrow \\ \text{f}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Ακόμα

$$\left.\begin{array}{l} -1 \le \eta\mu x \le 1 \\ -1 \le \sigma\upsilon\nu x \le 1 \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} -2 \le \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \le 2 \overset{\text{κοντά στο } +\infty}{\underset{f(x)>0}{\Rightarrow}} \left.\begin{array}{l} \dfrac{-2}{f(x)} \le \dfrac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \le \dfrac{2}{f(x)} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2}{f(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2}{f(x)} = 0 \end{array}\right\} \overset{\text{παρεμβολής}}{\underset{\text{κριτήριο}}{\Rightarrow}} \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0$$

Δ4. Α΄ τρόπος:

Θέτω

$$\left.\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}dx \\ \text{για } x = 1 \to u = 0 \\ \text{για } x = e^{\pi} \to u = \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}\,dx = \int_0^{\pi} f(u)\,du$$

Όμως

$$0 \le x \le \pi \overset{f}{\Rightarrow} f(0) \le f(x) \le f(\pi) \Rightarrow 0 \le f(x) \le \pi$$

με το « = » να μην ισχύει παντού .

Επειδή η f συνεχής στο [0, π] είναι :

$$0 < \int_0^{\pi} f(x)\,dx < \int_0^{\pi} \pi\,dx \Rightarrow 0 < \int_0^{\pi} f(x)\,dx < \pi^2$$

Β΄ τρόπος:

Έχουμε:

$$1 \le x \le e^{\pi} \overset{\ln x \nearrow}{\Rightarrow} \ln 1 \le \ln x \le \ln e^{\pi} \Rightarrow 0 \le \ln x \le \pi \overset{f \nearrow}{\Rightarrow} f(0) \le f(\ln x) \le f(\pi) \overset{\Delta 1}{\Rightarrow} 0 \le f(\ln x) \le \pi \overset{x>0}{\Rightarrow}$$

$$0 \le \frac{f(\ln x)}{x} \le \frac{\pi}{x}$$

Όμως το $\dfrac{f(\ln x)}{x}$ για $x = e^{\pi}$ παίρνει τιμή $\dfrac{f(\pi)}{e^{\pi}} = \dfrac{\pi}{e^{\pi}} \neq 0$, άρα δεν είναι παντού μηδέν, οπότε

$$\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}\,dx > 0$$

Ακόμα

$\dfrac{f(\ln x)}{x} - \dfrac{\pi}{x} \le 0$ και για $x = 1$ παίρνει τιμή $\dfrac{f(1)}{1} - \dfrac{\pi}{1} = \dfrac{0}{1} - \pi = -\pi \neq 0$, άρα δεν είναι παντού μηδέν, οπότε

$$\int_1^{e^{\pi}} \frac{f(\ln x)}{x}\,dx - \int_1^{e^{\pi}} \frac{\pi}{x}\,dx < 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \int_1^{e^\pi} \frac{\pi}{x}dx \Leftrightarrow$$

$$\int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi\left[\ln x\right]_1^{e^\pi} \Leftrightarrow$$

$$\int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi^2 .$$

Άρα

$$0 < \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x}dx < \pi^2$$