ΣΑΒΒΑΤΟ 24 ΜΑΪΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1°

Α.1 Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση f(x) =ln$|x|$, x$\in R^*$ είναι παραγωγίσιμη στο R^* και ισχύει: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$ **Μονάδες 10**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Σελίδα 235 σχολικού βιβλίου

Α.2 Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα [α,β];

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Σελίδα 191 σχολικού βιβλίου

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Αν μια συνάρτηση f:A→ℝ είναι 1−1, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει: $f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$ και $f(f^{-1}(y)) = y, y \in f(A)$ ***Σωστό***

β. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της. ***Σωστό***

γ. Όταν η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $αz^2$+βz+γ=0 με α,β,γ∈ℝ και α≠0 είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο C των μιγαδικών. ***Λάθος***

δ. Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο ℝ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει f΄΄(x) > 0 για κάθε πραγματικό αριθμό x. ***Λάθος***

ε. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και α,β,γ∈Δ τότε ισχύει

$$\int_a^\beta f(x)dx = \int_a^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$$ ***Σωστό***

ΘΕΜΑ 2°

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν

$$|(i+2\sqrt{2})z| = 6 \text{ και } |w-(1-i)| = |w-(3-3i)|$$ τότε να βρείτε:

α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z . **Μονάδες 6**

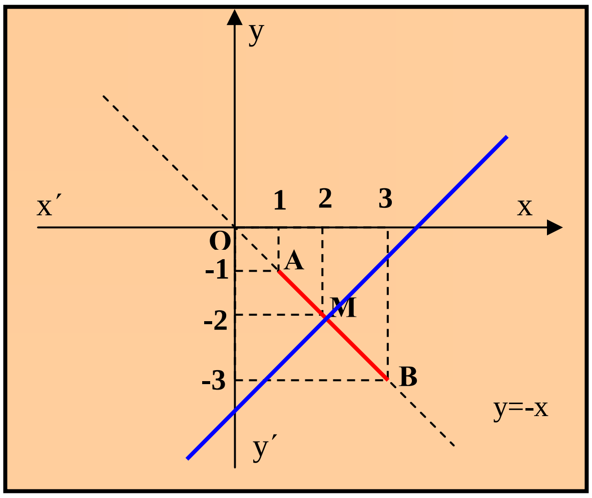
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}\cdot|z| = 6$, $|z| = 2$. Άρα z βρίσκεται στον κύκλο με κέντρο (0,0) και ακτίνα 2

β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w . **Μονάδες 7**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Ο w είναι στη μεσοκάθετο με άκρα A(1,-1) , B(3,-3)

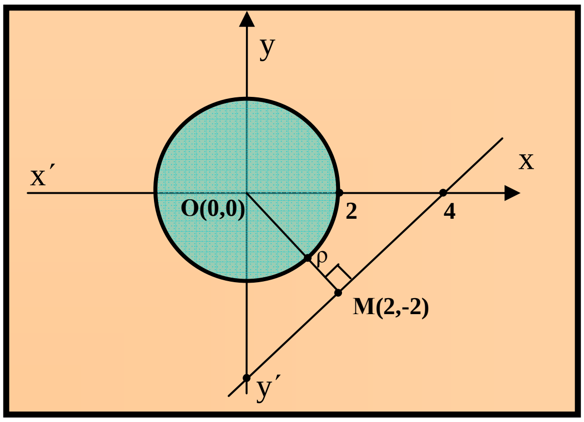
γ. την ελάχιστη τιμή του $|w|$ **Μονάδες 6**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Η εξίσωση της ΑΒ είναι y=-x άρα η ελάχιστη τιμή του w θα είναι όταν το w ταυτίζεται με το μέσο ΑΒ δηλαδή όταν η εικόνα του είναι το σημείο Μ(2,-2) άρα $|w|_{min} = (OM) = 2\sqrt{2}$



δ. την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$ **Μονάδες 6**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Από σχήμα $|z-w|_{min}$ =(ΟΜ)-(ΟΡ)=2$\sqrt{2}-2$



ΘΕΜΑ 3^{o}

Δίνεται η συνάρτηση f(x)= $f(x) = \begin{cases} x\ln x, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0. **Μονάδες 3**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{(\frac{-\infty}{+\infty})}{=} \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim\limits_{x\to0^+}(-x) = 0 = f(0)$

Άρα η f συνεχής στο 0.

β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $f'(x)=\ln x+1$

$f'(x)=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f΄(x)		-		+	
f (x)	0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	$+\infty$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,\frac{1}{e}]$

και γνησίως αύξουσα στο $[\frac{1}{e},+\infty)$

$f(0)=0$

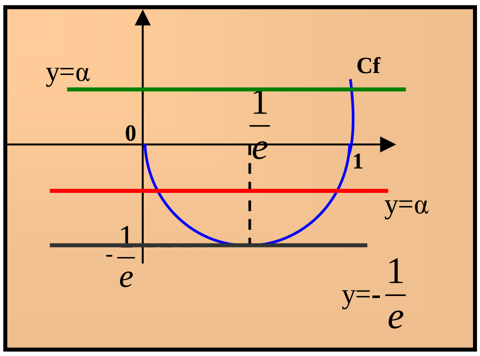
$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln x=+\infty \qquad f(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$. Άρα f(A)=$[-\frac{1}{e},+\infty)$

γ. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x=e^{\frac{a}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $x=e^{\frac{a}{x}}$ με λογαρίθμιση προκύπτει xlnx=α δηλαδή f(x)=α.
Διακρίνω τις εξής περιπτώσεις για το α:

- Αν α$\in(-\frac{1}{e},0)$ η ευθεία y=α τέμνει τη Cf σε δύο σημεία.
- Αν α=$-\frac{1}{e}$ η y=α τέμνει την Cf στο x= $\frac{1}{e}$
- Αν α$\geq$0 η y=α τέμνει τη Cf σ' ένα μόνο σημείο
- Αν α<$-\frac{1}{e}$ η y=α δεν τέμνει τη Cf



δ. Να αποδείξετε ότι ισχύει f΄(x+1)>f(x+1)−f(x) , για κάθε x > 0 . **Μονάδες 7**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $f'(x+1)>f(x+1)-f(x) \Leftrightarrow f'(x+1)>\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x} \quad (1)$

- η f συνεχής στο [x,x+1]

- η f παραγωγίσιμη στο (x,x+1)

Άρα με Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi \in (x, x+1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}$. Άρα η δοσμένη γίνεται $f'(x+1) > f'(\xi)$ που είναι αληθής διότι ξ<x+1 και f΄΄(x)=$\frac{1}{x}$>0 άρα η f΄ είναι γνήσια αύξουσα.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο ℝ για την οποία ισχύει

$$f(x) = (10x^3 + 3x)\int_0^2 f(t)dt - 45$$

α. Να αποδείξετε ότι f(x)=20x^3+6x−45 **Μονάδες 8**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Έστω $a = \int_0^2 f(t)dt$ τότε:

$$f(x) = (10x^3 + 3x)a - 45 \Rightarrow$$
$$\int_0^2 f(x)dx = a[\frac{10x^4}{4} + \frac{3x^2}{2}]_0^2 - 90 \Rightarrow$$
$$a = a \cdot 46 - 90 \Rightarrow a = 2$$

$$\boxed{\text{Άρα } f(x)=20x^3+6x-45}$$

β. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο ℝ. Να αποδείξετε ότι $g''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}$ **Μονάδες 4**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Έστω u=-h τότε $u \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h} = \lim_{u\to 0}\frac{g'(x)-g'(x+u)}{-u} = \lim_{u\to 0}\frac{g'(x+u)-g'(x)}{u} = g''(x)$$

γ. Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύει ότι $\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2} = f(x)+45$

i. να αποδείξετε ότι g(x)=x^5+x^3+x+1 **Μονάδες 10**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x-h)}{2h} =$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{[g'(x+h)-g'(x)]-[g'(x-h)-g'(x)]}{2h} = \frac{g''(x)-(-g''(x))}{2} = g''(x)$$

Άρα προκύπτει g´´(x)=$20x^3+6x \Rightarrow g'(x)=5x^4+3x^2+c_1 \quad και \quad με \quad x=0 \Rightarrow c_1=1$

άρα $g'(x)=5x^4+3x^2+1 \quad άρα \quad g(x)=x^5+x^3+x+c_2$ και με x=0$\Rightarrow c_2=1$ άρα $g(x)=x^5+x^3+x+1$

ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι "1−1" **Μονάδες 3**

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Παρατηρούμε ότι $g'(x)=5x^4+3x^2+1>0$ άρα η g είναι γνήσια αύξουσα άρα «1-1»