Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

Παράρτημα Νομού Εύβοιας

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2008

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο :

Α. Θεωρία , σχολικό βιβλίο σελ. 28

Β. Θεωρία , σχολικό βιβλίο σελ. 96

Γ. **α) Λ , β) Λ , γ) Σ , δ) Σ , ε) Σ**

ΘΕΜΑ 2ο :

α. $$\lim_{x\to 1}\frac{e^x f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$$

β. Η συνάρτηση f ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι παραγωγίσιμη σ'αυτό , ως πηλίκο

παραγωγίσιμων συναρτήσεων με :

$$f'(x)=\frac{e^x-(x-1)e^x}{e^{2x}}=\frac{e^x(1-x+1)}{e^{2x}}=\frac{2-x}{e^x}\Leftrightarrow e^x f'(x)=2-x$$

Επομένως :

$$e^x f'(x)=2-x$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ. Επειδή

$$f'(x)>0\Leftrightarrow 2-x>0\Leftrightarrow x<2$$

και $$f'(x)<0\Leftrightarrow 2-x<0\Leftrightarrow x>2$$

σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα :

x	**-∞ 2 +∞**
f΄(x)	**+ 0 -**
f(x)	↗ ↘

Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει στη θέση x_o=2 ολικό μέγιστο το

$$f(2)=\frac{1}{e^2}=e^{-2}.$$

ΘΕΜΑ 3ο :

α. Είναι

$$\overline{x}_A=\frac{20+26+24+22+18}{5}=\frac{110}{5}=22 \quad \text{(χιλιάδες ώρες)}$$

και

$$\overline{x}_{\mathrm{B}}=\frac{26+32+19+20+23}{5}=\frac{120}{5}=24 \quad \text{(χιλιάδες ώρες)}.$$

β. Έχουμε $\frac{38}{22}\simeq 1,73$ €/χιλ. ώρες και $\frac{40}{24}\simeq 1,67$ €/χιλ. ώρες ,

οπότε συμφέρει να αγοράσουμε μπαταρίες τύπου Β .

**** Η λύση είναι σύμφωνα το σκεπτικό αντίστοιχης άσκησης του σχολικού βιβλίου. Σκόπιμα δεν προχωράμε σε άλλες παρατηρήσεις.*

γ. Είναι

$$s_A{}^2=\frac{1}{5}\left[(20-22)^2+(26-22)^2+(24-22)^2+(22-22)^2+(18-22)^2\right]=8$$

δηλαδή $s_A=2\sqrt{2}$

και

$$s_{\mathrm{B}}{}^2=\frac{1}{5}\left[(26-24)^2+(32-24)^2+(19-24)^2+(20-24)^2+(23-24)^2\right]=22$$

δηλαδή $s_{\mathrm{B}}=\sqrt{22}$.

δ. Υπολογίζουμε τον συντελεστή μεταβολής του κάθε δείγματος και έχουμε :

$$CV_A=\frac{2\sqrt{2}}{22}=\frac{\sqrt{2}}{11} \quad \text{και} \quad CV_{\mathrm{B}}=\frac{\sqrt{22}}{24}\simeq\frac{3,3\sqrt{2}}{24}$$

οπότε είναι $\frac{CV_{\mathrm{B}}}{CV_{\mathrm{A}}}=\frac{3,3\cdot 11}{24}>1$, δηλαδή $CV_A<CV_B$.

Άρα το δείγμα Α παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια.

**** Η σύγκριση των δύο τιμών μπορεί να γίνει και με άλλους τρόπους .*

ΘΕΜΑ 4ο :

α. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα

A: « ένας κάτοικος της πόλης που επιλέγεται τυχαία , διαβάζει την εφημερίδα α » και

B: «ένας κάτοικος της πόλης που επιλέγεται τυχαία , διαβάζει την εφημερίδα β » .

Άρα , σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος , είναι :

$$P(A) = 0,5 \quad \text{και} \quad P(A - B) = 0,3 \ .$$

Είναι

- $P(A') = 1 - P(A) = 0,5$ και
- $P(A-B) = 0,3 \Leftrightarrow P(A) - P(A\cap B) = 0,3 \Leftrightarrow P(A\cap B)=0,2$

Ζητάμε την $P(A'\cup B)$. Είναι όμως :

$$P(A'\cup B)=P(A')+P(B)-P(A'\cap B)=$$

$$P(A') + P(B) - [\, P(B) - P(A\cap B)] = 1 - P(A) + P(A\cap B) = 0,5 + 0,2 = 0,7 = \frac{7}{10}$$

β . Το κλειδί για την απόδειξη της ανισότητας είναι να γράψουμε :

$$A\cap B \subseteq B \subseteq A'\cup B$$

Αυτή δίνει κατά τα γνωστά :

$$P(A\cap B)\leq P(B)\leq P(A'\cup B) \Leftrightarrow 0,2\leq P(B)\leq 0,7 \ .$$

γ . Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική με

$$f'(x) = 3x^2 - x + P(B) \ .$$

Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 1 - 12\,P(B)$.

Για να μην έχει ακρότατα η f , αρκεί να είναι $\Delta < 0$. Όμως :

$$\Delta<0 \Leftrightarrow 1-12\,P(B)<0 \Leftrightarrow P(B)>\frac{1}{12}$$

Αυτό όμως ισχύει , διότι από το ερώτημα β) είναι $P(B)>\frac{1}{5}>\frac{1}{12}$

Άρα λοιπόν $\Delta < 0$, οπότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επομένως η f δεν έχει ακρότατα.

*** Τις λύσεις των θεμάτων έκαναν ή επιμελήθηκαν οι μαθηματικοί :

Μπεληγιάννης Αθανάσιος – Στεργίου Χαράλαμπος – Παπαλουκάς Ιωάννης

*** Ευχαριστούμε για τις υποδείξεις και τις παρατηρήσεις του το Σχολικό Σύμβουλο Μαθηματικών του νομού Εύβοιας , κύριο Ευάγγελο Παναγιώτου