ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2007
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 98
Α.2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 141
Α.3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 280
Β. α. ΛΑΘΟΣ
β. ΛΑΘΟΣ
γ. ΛΑΘΟΣ
(Έπρεπε να έλεγε ότι η g είναι συνεχής στο $f(x_0)$)
δ. ΣΩΣΤΟ
ε. ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ 2ο

α. $|z| = \left|\dfrac{2+\alpha i}{\alpha+2i}\right| = \dfrac{|2+\alpha i|}{|\alpha+2i|} = \dfrac{\sqrt{2^2+\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+2^2}} = 1$

β. $z_1 = \dfrac{2}{2i} = \dfrac{-2i^2}{2i} = -i$ και $z_2 = \dfrac{2+2i}{2+2i} = 1$

i) $|z_2 - z_1| = |1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

ii) $(z_1)^{2v} = (-i)^{2v} = i^{2v} = (i^2)^v = (-1)^v = (z_1)^v$

ΘΕΜΑ 3ο

α. $f'(x) = 3x^2 - 3$

$f''(x) = 6x$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-		-	0	+	
$f''(x)$		-		-	0	+		+	
$f(x)$		↗	τ.μ.	↘	σ.κ.	↘	τ.ελ.	↗	

β. • $\Delta_1 = (-\infty , -1)$

Η f είναι γν. αύξουσα στο Δ_1

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} (x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta) = 2 - 2\eta\mu^2\theta = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$

άρα $f(\Delta_1) = (-\infty , 2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$

$0 \in f(\Delta_1)$, άρα η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ_1.

• $\Delta_2 = [-1 , 1]$

Η f είναι γν. φθίνουσα στο Δ_2

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) - 2\eta\mu^2\theta) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$

$f(1) = 1^3 - 3 - 2\eta\mu^2\theta) = -2 - 2\eta\mu^2\theta < 0$

άρα $f(\Delta_2) = (-2 - 2\eta\mu^2\theta , 2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$

$0 \in f(\Delta_2)$, άρα η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ_2.

• $\Delta_3 = (1 , +\infty)$

Η f είναι γν. αύξουσα στο Δ_3

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta) = - 2 - 2\eta\mu^2\theta < 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta) = +\infty$

άρα $f(\Delta_3) = (-2 - 2\eta\mu^2\theta , +\infty)$

$0 \in f(\Delta_3)$, άρα η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο Δ_3.

Επομένως η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες στο IR.

γ. Τα ζητούμενα σημεία είναι :

$A(-1 , 2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$, $B(1 , - 2 - 2\eta\mu^2\theta)$ και $\Gamma(0 , -2\eta\mu^2\theta)$

Οι συντεταγμένες των A , B , Γ ικανοποιούν την εξίσωση της ευθείας $(\varepsilon) : y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$, άρα τα A , B , Γ βρίσκονται στην (ε).

δ. Θεωρούμε $g(x) = f(x) - (-2x - 2\eta\mu^2\theta) = x^3 - x$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
g (x)		-	0	+	0	-	0	+	

$$E = \int_{-1}^{0} g(x)\,dx - \int_{0}^{1} g(x)\,dx = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx - \int_{0}^{1} (x^3 - x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = \ldots = \frac{1}{2}\ \text{τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Για $x \in [0, 1]$ είναι :

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) \geq f(0) \Leftrightarrow f(x) \geq f(0) > 0 \\ g(x) > 0 \end{array}\right\} \text{άρα } f(x)\cdot g(x) > 0$$

Για $x \in (0, 1]$ είναι $f(x) \cdot g(x) > 0$ άρα:

$$\int_0^x f(x)\cdot g(x)\,dx > 0 \Leftrightarrow F(x) > 0$$

β. $0 \leq t \leq x \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(t) \leq f(x) \overset{g(t)>0}{\Leftrightarrow} f(t)\cdot g(t) \leq f(x)\cdot g(t) \Leftrightarrow$

$f(x)\cdot g(t) - f(t)\cdot g(t) \geq 0$

Θεωρώ $\varphi(t) = f(x)\cdot g(t) - f(t)\cdot g(t),\ t \in [0, 1]$

Η φ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πράξεις συνεχών

Είναι $\varphi(t) \geq 0$ και για $x > 0$, η φ δεν είναι παντού μηδέν στο $[0, x]$

άρα $\int_0^x \varphi(t)\,dt > 0 \Leftrightarrow \int_0^x [f(x)\cdot g(t) - f(t)\cdot g(t)]\,dt > 0 \Leftrightarrow$

$$\int_0^x f(x)\cdot g(t)dt - \int_0^x f(t)\cdot g(t)dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^x f(x)\cdot g(t)dt > \int_0^x f(t)\cdot g(t)dt \Leftrightarrow$$

$$f(x)\cdot \int_0^x g(t)dt > F(x) \Leftrightarrow f(x)\cdot G(x) > F(x)$$

γ. Θεωρούμε συνάρτηση H, με $H(x) = \dfrac{F(x)}{G(x)}$.

$$H'(x) = \frac{F'(x)\cdot G(x) - F(x)\cdot G'(x)}{[G(x)]^2} = \frac{f(x)\cdot g(x)\cdot G(x) - F(x)\cdot g(x)}{[G(x)]^2}$$

$$= g(x)\cdot\frac{f(x)\cdot G(x) - F(x)}{[G(x)]^2} > 0$$

διότι $g(x) > 0$ και $f(x)\cdot G(x) > F(x)$ από (β΄) ερώτημα

Άρα η H είναι γν. αύξουσα στο [0 , 1]

$$x \le 1 \overset{H\uparrow}{\Leftrightarrow} H(x) \le H(1) \Leftrightarrow \frac{F(x)}{G(x)} \le \frac{F(1)}{G(1)}.$$

δ. $$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t)\cdot g(t)\,dt\right)\left(\int_0^{x^2} \eta\mu t^2\,dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)\,dt\right)\cdot x^5} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\int_0^x f(t)\cdot g(t)\,dt}{\int_0^x g(t)\,dt}\cdot\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2\,dt}{x^5}\right)$$

- $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x f(t)\cdot g(t)\,dt}{\int_0^x g(t)\,dt} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{L' Hospital}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)\cdot g(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} f(x) \overset{f\ \text{συνεχής}}{=} f(0)$$

- $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2\,dt}{x^5} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{L' Hospital}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x^4\cdot 2x}{5x^4} = \frac{2}{5}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x^4}{x^4}\cdot\lim_{x\to 0^+} x = 0$$

Άρα $$L = \lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x f(t)\cdot g(t)\,dt}{\int_0^x g(t)\,dt}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2\,dt}{x^5} = f(0)\cdot 0 = 0$$