mathematica.gr

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014

Λύσεις των Θεμάτων

Έκδοση 2η (9/06/2014, 21:00)

Οι απαντήσεις και οι λύσεις
είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς
των Επιμελητών των φακέλων του Λυκείου
του Δικτυακού Τόπου **mathematica.gr**
με βάση υλικό που αναρτήθηκε στο mathematica
http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=133&t=44574

Συνεργάστηκαν οι:

Στράτης Αντωνέας, Ανδρέας Βαρβεράκης, Βασίλης Κακαβάς,
Γιώργης Καλαθάκης, Φωτεινή Καλδή, Σπύρος Καρδαμίτσης,
Νίκος Κατσίπης, Στάθης Κούτρας, Χρήστος Κυριαζής,
Γρηγόρης Κωστάκος, Βαγγέλης Μουρούκος, Ροδόλφος Μπόρης,
Μίλτος Παπαγρηγοράκης, Λευτέρης Πρωτοπαπάς, Γιώργος Ρίζος,
Σωτήρης Στόγιας, Αλέξανδρος Συγκελάκης, Αχιλλέας Συνεφακόπουλος,
Κώστας Τηλέγραφος, Χρήστος Τσιφάκης

Το **Δελτίο** διατίθεται ελεύθερα
από το δικτυακό τόπο **mathematica.gr**

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 8

Α2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

Μονάδες 3

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε $z\in\mathbb{C}$ ισχύει $z-\overline{z}=2\text{Im}(z)$.

(μονάδες 2)

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

(μονάδες 2)

γ) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

(μονάδες 2)

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και α, β, γ ∈Δ, τότε ισχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx$$

(μονάδες 2)

ε) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ.

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α1. Θεώρημα, σχολικό βιβλίο σελίδα 251.

Α2. Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελίδα 273.

Α3. Ορισμός, σχολικό βιβλίο σελίδα 150.

Α4. **α)** Λ, σχολικό βιβλίο σελίδα 91.

β) Σ, σελίδα 178.

γ) Σ, σελίδα 260.

δ) Σ, σελίδα 332.

ε) Λ, Προκύπτει από το σχόλιο στη σελίδα 254.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση

$$2|z|^2+(z+\bar{z})i-4-2i=0,\ z\in\mathbb{C}$$

Β1. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 9

Β2. Αν $z_1=1+i$ και $z_2=1-i$ είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$w=3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39}$$

είναι ίσος με $-3i$.

Μονάδες 8

Β3. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών u για τους οποίους ισχύει

$$|u+w|=|4z_1-z_2-i|$$

όπου w, z_1, z_2 οι μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος Β2.

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

Β1. Έστω $z=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$,

οπότε

$$2|z|^2+(z+\bar{z})i-4-2i=0\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2xi-4-2i=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=2\\2xi=2i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=2\\x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=1\\x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\pm1\\x=1\end{cases}$$

Άρα η εξίσωση έχει λύσεις $z_1=1+i,\ z_2=1-i$.

Β2. Είναι

$$w=3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39}=3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{39}=\left(\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right)^{39}=\left(\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}\right)^{39}=3\left(\frac{2i}{2}\right)^{39}=$$

$$=3i^{39}=3i^{4\cdot9+3}=3\left(i^4\right)^9\cdot i^3=3\cdot1^9\cdot i^3=3i^3=-3i.$$

Β3. Είναι

$$\begin{aligned}|u+w|=|4z_1-z_2-i| &\Leftrightarrow |u-3i|=|4+4i-1+i-i| \\ &\Leftrightarrow |u-3i|=|4i+3| \\ &\Leftrightarrow |u-3i|=5,\end{aligned}$$

οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του u είναι ο κύκλος με κέντρο $K(0,3)$ και ακτίνα 5.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=x-\ln(e^x+1), x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να μελετήσετε την h ως προς την κυρτότητα.

Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την ανίσωση

$$e^{h(2h'(x))}<\frac{e}{e+1},\ x\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$, καθώς και την πλάγια ασύμπτωτή της στο $-\infty$.

Μονάδες 6

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση $\phi(x)=e^x\left(h(x)+\ln 2\right), x\in\mathbb{R}$

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της φ(x), τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

Γ1. Η $h(x)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,

$$\text{με } h'(x)=\frac{1}{e^x+1} \text{ και } h''(x)=\left(\frac{1}{e^x+1}\right)'=\frac{-e^x}{\left(e^x+1\right)^2}<0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

οπότε στρέφει τα κοίλα κάτω (είναι κοίλη).

Γ2. Η ανίσωση γράφεται ισοδύναμα για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}e^{h(2h'(x))}<\frac{e}{e+1} &\Leftrightarrow \ln\left(e^{h(2h'(x))}\right)<1-\ln(e+1) \\ &\Leftrightarrow h(2h'(x))<h(1)\end{aligned}$$

Αφού η $h(x)$ είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$ (έχει παράγωγο θετική), θα είναι

$$2h'(x)<1\Leftrightarrow h'(x)<\frac{1}{2}\Leftrightarrow h'(x)<h'(0)$$

Αφού η $h'(x)$ είναι γνήσια φθίνουσα, είναι $x>0$.

Γ3. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln\left(e^x+1\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln e^x-\ln\left(e^x+1\right)\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\frac{e^x}{e^x+1}\right)$$

Αν $u(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty} u(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=1,$$

οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\lim\limits_{u\to1}(\ln u)=0$.

Η ευθεία y = 0 είναι η οριζόντια ασύμπτωτης της C_h στο $+\infty$.

Είναι

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-\ln\left(e^x+1\right)}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{\ln\left(e^x+1\right)}{x}\right)$$

Είναι

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\ln\left(e^x+1\right)}{x}\right)=0,$$

αφού

$$\lim_{x\to-\infty}\left(e^x+1\right)=0+1=1\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\left(\ln\left(e^x+1\right)\right)=0,\quad\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

οπότε

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=1=\lambda$$

και

$$\lim_{x\to-\infty}\left(h(x)-\lambda x\right)=-\lim_{x\to-\infty}\left(\ln\left(e^x+1\right)\right)=0=\beta,$$

οπότε η $y=x$ είναι η πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $-\infty$.

Γ4. Είναι

$$\phi(x)=e^x\left(h(x)+\ln2\right)=e^x\left(x+\ln\frac{2}{e^x+1}\right),\ x\in IR$$

Είναι

$$\phi(x)=0\Leftrightarrow h(x)=-\ln2=h(0)\Leftrightarrow x=0$$

και

$$\phi(x)>0\Leftrightarrow h(x)>-\ln2=h(0)\Leftrightarrow x>0,$$

αφού η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι και ένα προς ένα.

Άρα, το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με

$$E=\int_0^1 \phi(x)dx=\int_0^1 e^x\left[x-\ln\left(e^x+1\right)+\ln 2\right]dx=$$

$$=\int_0^1 e^x \ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)dx=\int_0^1 \left(e^x\right)'\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)dx=$$

$$=\left[e^x\ln\left(\frac{2e^x}{e^x+1}\right)\right]_0^1-\int_0^1 e^x\frac{e^x+1}{2e^x}\frac{2e^x\left(e^x+1\right)-2e^x\cdot e^x}{\left(e^x+1\right)^2}dx=$$

$$=e\cdot\ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)-e\cdot\ln 1-\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=$$

$$=e\cdot\ln\left(\frac{2}{e+1}\right)+e-\left[\ln\left(e^x+1\right)\right]_0^1=$$

$$=e\cdot\ln\left(\frac{2}{e+1}\right)+e-\ln(e+1)+\ln 2=(e+1)\ln\left(\frac{2}{e+1}\right)+e \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & \text{αν } x\neq 0\\ 1, & \text{αν } x=0\end{cases}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$ και, στη συνέχεια, ότι είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 7

Δ2. Δίνεται επιπλέον ότι η f είναι κυρτή.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\int_1^{2f'(x)} f(u)du=0$$

έχει ακριβώς μία λύση, η οποία είναι η $x=0$.

(μονάδες 7)

β) Ένα υλικό σημείο Μ ξεκινά τη χρονική στιγμή $t=0$ από ένα σημείο $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ με $x_0<0$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$, $x\geq x_0$ με $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x(t) του σημείου Μ είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του y(t), αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t\geq 0$.

(μονάδες4)

Μονάδες 11

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=\left(xf(x)+1-e\right)^2(x-2)^2,\ x\in(0,+\infty)$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

Δ1. Είναι

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1=f(0),$$

άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Για $x\neq 0$ είναι $f'(x)=\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}=\dfrac{h(x)}{x^2}$, όπου $h(x)=xe^x-e^x+1$.

Το πρόσημο της h καθορίζει το πρόσημο της f'.

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ με $h'(x)=xe^x$.

Επίσης:

$h'(x)=0\Leftrightarrow x=0$,

$h'(x)>0\Leftrightarrow x>0$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$,

$h'(x)<0\Leftrightarrow x<0$ άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
h'(x)	-	0	+
h(x)	↘	0	↗

Συνεπώς για $x>0$ έχουμε $h(x)>h(0)\Leftrightarrow f'(x)>0$.

Για $x<0$ έχουμε $h(x)>h(0)\Leftrightarrow f'(x)>0$.

Τελικά, αφού $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, άρα είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

Δ2.

α) Θα βρούμε αρχικά την παράγωγο της f στο 0 με τη χρήση του ορισμού.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2}=\frac{1}{2}\in\mathbb{R},$$

άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

Τώρα, η $x=0$ είναι προφανής λύση της δοσμένης εξίσωσης,

αφού για $x=0$ το πρώτο μέλος είναι ίσο με

$$\int_1^{2\frac{1}{2}} f(u)du=\int_1^1 f(u)du=0.$$

Για $x>0$ είναι $e^x>1\Rightarrow\dfrac{e^x-1}{x}>0\Rightarrow f(x)>0$, ενώ για $x<0$ είναι $e^x<1\overset{x<0}{\Rightarrow}\dfrac{e^x-1}{x}>0\Rightarrow f(x)>0$.

Για $x=0$ έχουμε $f(0)=1>0$.

Αφού η f είναι κυρτή, η f' είναι γνησίως αύξουσα, συνεπώς

για $x>0\Rightarrow f'(x)>f'(0)\Leftrightarrow 2f'(x)>1$ και αφού $f(x)>0$ για κάθε $x>0$, άρα

$$\int_1^{2f'(x)} f(u)du>0$$

οπότε δεν υπάρχουν λύσεις της δοσμένης εξίσωσης για $x>0$.

Όμοια για $x<0\Rightarrow f'(x)<f'(0)\Leftrightarrow 2f'(x)<1$ και $f(x)>0$ για κάθε $x<0$,

οπότε

$$\int_{2f'(x)}^1 f(u)du>0\Leftrightarrow\int_1^{2f'(x)} f(u)du<0$$

άρα δεν υπάρχουν λύσεις της δοσμένης εξίσωσης για $x<0$.

Συνεπώς η μοναδική λύση της αρχικής εξίσωσης είναι η $x=0$.

β) Αν t_0 είναι η χρονική στιγμή στην οποία ισχύει $x'(t_0)=2y'(t_0)$ τότε έχουμε διαδοχικά

$$x'(t_0)=2y'(t_0)\Leftrightarrow x'(t_0)=2f'(x(t_0))x'(t_0)\overset{x'(t_0)\neq 0}{\Leftrightarrow} f'(x(t_0))=\frac{1}{2}.$$

$$\Leftrightarrow f'(x(t_0))=f'(0)\overset{f'\uparrow \text{άρα} 1-1}{\Leftrightarrow} x(t_0)=0$$

Άρα $y(t_0)=f(x(t_0))=f(0)=1$, συνεπώς το ζητούμενο σημείο είναι το $A(0,1)$.

Δ3. $g(x)=\left(e^x-e\right)^2(x-2)^2$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο παραγωγισίμων με

$$g'(x)=2\left(e^x-e\right)(x-2)(xe^x-e^x-e)$$
$$=2\left(e^x-e\right)(x-2)r(x)$$

όπου $r(x)=xe^x-e^x-e$.

Η συνάρτηση $r(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $r'(x)=xe^x$.

Είναι $r'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ και $r'(x)>0\Leftrightarrow x>0$ άρα η r είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Μάλιστα επειδή $r(1)=-e<0$, $r(2)=e^2-e>0$ και η $r(x)$ είναι συνεχής στο $[1,2]$ άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(1,2)$ ώστε $r(x_0)=0$ και επειδή η r είναι γνησίως αύξουσα η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Τελικά

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left(x=1,\ x=x_0,\ x=2\right).$$

Συνεπώς φτιάχνοντας ένα πίνακα προσήμου για την g' φαίνεται εύκολα ότι

$$g'(x)<0 \text{ όταν } x\in(0,1)\cup(x_0,2)$$

ενώ

$$g'(x)>0 \text{ όταν } x\in(1,x_0)\cup(2,+\infty).$$

x	0		1		x_0		2		$+\infty$
$x-2$	-		-		-	0	+		
e^x-e	-	0	+		+		+		
e^xx-e^x-e	-		-	0	+		+		
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+		
$g(x)$	↘		↗		↘		↗		
		T.E.		T.M.		T.E.			

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(0,1]$ και $[x_0,2]$ ενώ είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $[1,x_0]$ και $[2,+\infty)$.

Άρα τελικά όπως φαίνεται και από τον πίνακα μονοτονίας, η g έχει 2 θέσεις τοπικών ελαχίστων στα $x=1$ και $x=2$ και μία θέση τοπικού μεγίστου στο $x=x_0$.

ΣΧΟΛΙΑ:

Β1.

2η ΛΥΣΗ :

(…)

$$2|z|^2+(z+\bar{z})i-4-2i=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2|z|^2-4=0 \\ z+\bar{z}-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2=2 \\ Re(z)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Im(z)=\pm 1 \\ Re(z)=1 \end{cases},$$

άρα (...)

Β2.

Εναλλακτικές λύσεις

1η $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{1+i}{-i(1+i)}=\dfrac{1}{-i}=\dfrac{i}{-i^2}=i$, άρα (...)

2η $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{i(1-i)}{1-i}=i$, άρα (...)

Β3.

Εναλλακτικές λύσεις

1η Με την αντικατάσταση $u=x+yi, x,y\in\mathbb{R}$, προκύπτει

$$x^2+(y-3)^2=25$$

που είναι εξίσωση κύκλου ...

2η Με την αντικατάσταση $u=x+yi, x,y\in\mathbb{R}$, προκύπτει

$$x^2+y^2-6y-16=0$$

που είναι εξίσωση κύκλου αφού $0^2+(-6)^2-4(-16)=100>0$ με κέντρο $K(0,3)$ και ακτίνα $R=\dfrac{\sqrt{100}}{2}=5$.

Γ2.

2η ΛΥΣΗ (για την εξίσωση):

Είναι

$$h(x)=x-\ln(e^x+1)=\ln(e^x)-\ln(e^x+1)=\ln\frac{e^x}{e^x+1}$$

Έχουμε ότι

$$h'(x)=\frac{1}{e^x+1}>0 \text{ με } h'(0)=\frac{1}{2} \text{ και } h''(x)=-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}<0$$

και η προς απόδειξη σχέση

$$e^{h(2h'(x))}=\frac{e^{2h'(x)}}{e^{2h'(x)}+1} \text{ και } e^{h(2h'(0))}=\frac{e}{e+1}$$

Αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $A(x)=\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}, x\in\mathbb{R}$

αυτή έχει παράγωγο

$$A'(x)=\frac{2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}>0,\ x\in\mathbb{R},$$

άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$A^{2h'(x)}<A^{2h'(0)} \Leftrightarrow h'(x)<h'(0) \Leftrightarrow \frac{1}{e^x+1}<\frac{1}{1+1}$$
$$\Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow x>0$$

Γ2.

3η ΛΥΣΗ (για την εξίσωση):

Είναι

$$h'(x)=1-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1},$$

συνεπώς

$$2h'(x)=\frac{2}{e^x+1}.$$

Επομένως

$$h(2h'(x))=\frac{2}{e^x+1}-\ln\left(e^{\left(\frac{2}{e^x+1}\right)}+1\right),$$

άρα

$$e^{h(2h'(x))}=\frac{e^{\left(\frac{2}{e^x+1}\right)}}{e^{\left(\frac{2}{e^x+1}\right)}+1},$$

οπότε η ανισότητα γίνεται διαδοχικά

$$\frac{e^{\left(\frac{2}{e^x+1}\right)}}{e^{\left(\frac{2}{e^x+1}\right)}+1}<\frac{e}{e+1}\Leftrightarrow e\cdot e^{\left(\frac{2}{e^x+1}\right)}+e^{\left(\frac{2}{e^x+1}\right)}<e\cdot e^{\left(\frac{2}{e^x+1}\right)}+e\Leftrightarrow e^{\left(\frac{2}{e^x+1}\right)}<e$$

$$\Leftrightarrow\frac{2}{e^x+1}<1\Leftrightarrow 2<e^x+1\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow x>0$$

Γ3.

2η ΛΥΣΗ (για το όριο):

Εναλλακτικά για το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}$.

Επειδή υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(e^x+1\right)'}$, είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(e^x+1\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$.

Γ4.

2η ΛΥΣΗ (για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος)

$$E=\int_0^1\left(e^xh(x)+e^x\ln2\right)dx=\int_0^1\left(e^x\right)'h(x)dx+\ln2\int_0^1e^x\,dx=$$

$$=\left[e^x\,h(x)\right]_0^1-\int_0^1e^x\left(h(x)\right)'dx+\ln2\left(e^1-e^0\right)=$$

$$=e^1h(1)-e^0h(0)-\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx+e\ln2-\ln2=$$

$$=e\left(1-\ln(e+1)+\ln2-\int_0^1\frac{\left(e^x+1\right)'}{e^x+1}dx+e\ln2-\ln2=\right.$$

$$=e-e\ln\left(e+1\right)-\left[\ln\left(e^x+1\right)\right]_0^1+e\ln2=e+(e+1)\ln\left(\frac{2}{e+1}\right)\text{ τ.μ.}$$

Γ4.

3η ΛΥΣΗ (για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος)

Με αλλαγή μεταβλητής $t=e^x$ έχουμε $dt=e^x dx$, και

$$E=\int_0^1|\phi(x)|dx=\int_0^1\phi(x)dx=\int_1^e\ln\left(\frac{2t}{t+1}\right)dt=$$

$$=\int_1^e\ln 2dt+\int_1^e\ln t dt-\int_1^e\ln(t+1)dt=(e-1)\ln 2+I(0)+I(1),$$

όπου $I(\alpha):=\int_1^e\ln(t+\alpha)dt$ για $\alpha\geq 0$.

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες για $\alpha\geq 0$ έχουμε

$$I(\alpha)=\int_1^e\ln(t+\alpha)dt=\int_1^e(t+\alpha)'\ln(t+\alpha)dt=$$

$$=[(t+\alpha)\ln(t+\alpha)]_{t=1}^{t=e}-\int_1^e 1dt=$$

$$=(e+\alpha)\ln(e+\alpha)-(1+\alpha)\ln(1+\alpha)-(e-1)$$

Συνεπώς,

$$I(0)=1 \text{ και } I(1)=(e+1)\ln(e+1)-2\ln 2-e+1,$$

οπότε το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E=(e-1)\ln 2+1-(e+1)\ln(e+1)+e+2\ln 2-1=$$

$$=(e+1)\ln\frac{2}{e+1}+e \text{ τ.μ.}$$

Δ1.

ΣΧΟΛΙΟ:

Το ζητούμενο όριο $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ είναι η παράγωγος του e^x για $x=0$ αν χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό.

Δ2.

2η ΛΥΣΗ (για το πρόσημο της συνάρτησης f στο α ερώτημα)

Το πρόσημο της f προκύπτει και από τη μονοτονία της.

Πράγματι, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,+\infty)$ άρα

$$f\left((-\infty,+\infty)\right)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$$

διότι

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(e^x-1)\frac{1}{x}=(-1)\cdot 0=0$$

και

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty.$$

Δ2.

2η ΛΥΣΗ (για το α ερώτημα)

Δείχνουμε όπως στην αρχική προσέγγιση ότι το 0 είναι λύση της δοσμένης εξίσωσης.

Έστω α,β με $\alpha<\beta$ δύο διαφορετικές λύσεις. Τότε αφού f κυρτή άρα $f'(\alpha)<f'(\beta)\Leftrightarrow 2f'(\alpha)<2f'(\beta)$.

Όμως

$$\int_1^{2f'(\alpha)} f(u)du = \int_1^{2f'(\beta)} f(u)du\,(=0) \Leftrightarrow \int_{2f'(\alpha)}^{2f'(\beta)} f(u)du = 0,$$

που είναι άτοπο διότι (η απόδειξη όμοια με την λύση παραπάνω) $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ2.

3η ΛΥΣΗ (για το α ερώτημα)

Αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα έχει αρχική, έστω $F(x)$. Τότε, $F'(x)=f(x)>0$ (η απόδειξη για το πρόσημο της f γίνεται όπως έχει ήδη αναφερθεί). Άρα η $F(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Συνεπώς έχουμε διαδοχικά:

$$\int_1^{2f'(x)} f(u)du = 0 \Leftrightarrow \left[F(u)\right]_1^{2f'(x)} = 0 \Leftrightarrow F(2f'(x)) - F(1) = 0$$

$$\Leftrightarrow F(2f'(x)) = F(1) \Leftrightarrow 2f'(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Δ2.

4η ΛΥΣΗ (για το α ερώτημα)

Ορίζουμε τη συνάρτηση $h(x)=\int_1^{2f'(x)} f(u)du$, $x\in\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ ως σύνθεση της παραγωγίσιμης συνάρτησης $\int_1^x f(u)du$ με την $2f'(x)$ (η οποία είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}^*$) με παράγωγο $h'(x)=2f\left(2f'(x)\right)f''(x)$. Όμως $2f\left(2f'(x)\right)>0$ διότι έχει αποδειχθεί παραπάνω ότι η συνάρτηση f είναι θετική στο $\mathbb{R}$. Άρα αρκεί να μελετήσω το πρόσημο της f'' για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

$$f''(x)=\frac{e^x(x^2-2x+2)-2}{x^3}=\frac{k(x)}{x^3},\ \text{όπου}\ k(x)=e^x(x^2-2x+2)-2.$$

Όμως $k'(x)=x^2e^x\geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=0$. Άρα η συνάρτηση k είναι γνησίως αύξουσα σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Επειδή το 0 είναι προφανής ρίζα της συνάρτησης k, άρα είναι και μοναδική.

Επίσης

$$x>0 \Rightarrow k(x)>k(0) \Rightarrow k(x)>0$$

και

$$x<0 \Rightarrow k(x)<k(0) \Rightarrow k(x)<0.$$

Άρα οι $k(x)$ και x^3 είναι ομόσημες οπότε $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

Συνεπώς $h'(x)=2f\left(2f'(x)\right)f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$

και αφού η h είναι συνεχής στο $x_0=0$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με προφανή ρίζα το $x=0$, άρα και μοναδική.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$k'(x)$		+	0	+	
$k(x)$		-	0	+	
x^3		-	0	+	
$f''(x)$		+	∄	+	

Δ2.

5η ΛΥΣΗ (για το α ερώτημα)

Έστω ότι η συνάρτηση

$$T(x)=\int_1^x f(u)du,\ x\in\mathbb{R}$$

έχει και άλλη ρίζα $\rho \neq 1$ και ας υποθέσουμε χωρίς βλάβη ότι $1<\rho$.

Τότε από Θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση Τ(x) στο διάστημα [1, ρ] έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (1,\rho)$ ώστε $T'(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi)=0$, που είναι άτοπο (αφού f(x) > 0) οπότε το 1 είναι μοναδική ρίζα.

Άρα από την $\int_1^{2f'(x)} f(u)du=0$ προκύπτει ότι

$$2f'(x)=1 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(x)=f'(0) \Leftrightarrow x=0,$$

αφού η f΄ είναι "1-1" ως γνησίως αύξουσα εφόσον η f είναι κυρτή.

Δ2.

6η ΛΥΣΗ (για το α ερώτημα)

Η συνάρτηση $F(x)=\int_1^{2x} f(u)du,\ x\in\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα διότι $F'(x)=2f(2x)>0$.

Θεωρούμε τυχαία $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1<x_2$.

Τότε επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα (ως κυρτή) έχουμε $f'(x_1)<f'(x_2)$

και εφόσον η F είναι γνησίως αύξουσα άρα

$$F(f'(x_1))<F(f'(x_2)) \Leftrightarrow \int_1^{2f'(x_1)} f(u)du < \int_1^{2f'(x_2)} f(u)du$$

δηλαδή η συνάρτηση $G(x)=\int_1^{2f'(x)} f(u)du,\ x\in\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα με μοναδική ρίζα την $x=0$.

Δ2.

2η ΛΥΣΗ (για το β ερώτημα)

Για εκείνα τα t για τα οποία $x(t)\neq 0$ έχουμε

$$y(t)=f(x(t))=\frac{e^{x(t)}-1}{x(t)},$$

συνεπώς

$$y'(t)=e^{x(t)}x'(t)x(t)-\left(e^{x(t)}-1\right)x'(t)x^2(t)$$

Για $t=t_0$ ισχύει

$$x'(t_0)=2y'(t_0) \Leftrightarrow x'(t_0)=2e^{x(t_0)}x'(t_0)x(t_0)-e^{x(t_0)}-\left(e^{x(t_0)}-1\right)x'(t_0)x^2(t_0)$$

$$\overset{x'(t_0)>0}{\Leftrightarrow} 2e^{x(t_0)}x(t_0)-2e^{x(t_0)}+2-x^2(t_0)=0 \quad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $k(x)=2xe^x-2e^x+2-x^2$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $k'(x)=2x\left(e^x-1\right)$.

Είναι $k'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Είναι εύκολο να δούμε με περιπτώσεις ή φτιάχνοντας πίνακα προσήμου ότι $k'(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$.

Συνεπώς η k(x) είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ως συνεχής στο 0. Επίσης η k(x) έχει προφανή ρίζα την $x_0=0$ η οποία είναι και μοναδική. Άρα πρέπει $x(t_0)=0$ που απορρίπτεται.

x	-∞	0	+∞
2x	-	0	+
e^x-1	-	0	+
k'(x)	+	0	+
k(x)	↗	0	↗

Η μόνη περίπτωση που μένει είναι $x(t_0)=0$. Τότε $y(t_0)=f(x(t_0))=1$ και $y'(t_0)=\frac{1}{2}=\frac{x'(t_0)}{2}$.

Άρα τελικά $x(t_0)=0$ οπότε $y(t_0)=f\left(x(t_0)\right)=f(0)=1$ συνεπώς το ζητούμενο σημείο είναι το $A(0,1)$.

Δ2.

ΣΧΟΛΙΟ (για το β ερώτημα)

Παρά το ότι οι δύο τρόποι λύσης του ερωτήματος είναι οι αναμενόμενοι για την επίλυσή του, εντούτοις υπάρχουν περιπτώσεις καμπύλων πάνω στις οποίες κινείται η τετμημένη $x(t)$, οι οποίες ενώ ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του προβλήματος **δε** διέρχονται καμία χρονική στιγμή t από το σημείο $A(0,1)$. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε $x(t)=-e^{-t}$ για την οποία $x_0=x(0)=-1<0$ και $x'(t)=e^{-t}>0$ για κάθε $t\geq 0$, αλλά δεν υπάρχει t τέτοιο ώστε $x(t)=0$.

Δ3.

2η ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι $g(x)\geq g(1)=g(2)=0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, οπότε η g έχει ολικό (άρα και τοπικό) ελάχιστο στα σημεία $x_1=1$ και $x_2=2$.

Από το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής για τη συνάρτηση g στο $[1,2]$ υπάρχει $x_3\in[1,2]$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $g(x)\leq g(x_3)$ για κάθε $x\in[1,2]$. Αν ήταν $x_3\in\{1,2\}$, τότε θα ήταν $g(x)=0$ για κάθε $x\in[1,2]$, πράγμα άτοπο. Άρα, είναι $x_3\in(1,2)$, οπότε η g παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_3.

Δ3.

3η ΛΥΣΗ

Η ύπαρξη τρίτης ρίζας της παραγώγου αποδεικνύεται και με εφαρμογή του Θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση g στο διάστημα [1, 2].